9. To utvalg.

9.1. Innledning.

Hittil har vi kun trukket slutninger om *en* populasjon på grunnlag av et utvalg fra denne populasjonen. Nå skal vi trekke slutninger om *to* populasjoner (mer presist: om likheter og forskjeller mellom to populasjoner) på grunnlag av ett utvalg fra hver populasjon. Vi skal både sette opp konfidensintervall for slike forskjeller, og vi skal teste hypoteser om slike forskjeller.

Hvilke ”forskjeller” kan det være tale om? Her er et lite utvalg eksempler:

- Er det forskjell mellom hvor lang tid det tar å bli frisk når man behandles med den ene eller den andre medisinen? Populasjonene er pasienter som behandles med hver av de to medisinene.
- Hvor mye reduseres andelen av sauer som angripes av en bestemt sykdom etter at de ble vaksinert? Populasjonene er sauer som ikke er vaksinert, og sauer som er det.
- Gir en ny produksjonsmetode mer ensartede produkter? Populasjonene er varer som er produsert med den gamle metoden og varer som er produsert med den nye.

Du klarer sikkert å pønske ut flere eksempler selv.

Det er viktig å være klar over forutsetningene for at slike tester skal kunne gjennomføres. Vi skal se på to situasjoner:

1. Vi har *to uavhengige utvalg*, som er tilfeldige utvalg tatt fra hver sin populasjon.
2. Vi har *samhørende par*.

La meg illustrere forskjellen mellom disse situasjonene med et eksempel: Vi skal teste om en ny type sko for sprintere er bedre enn den gamle typen. Dette kan gjøres på to måter:

1. Vi kan *tilfeldig* plukke ut *to* grupper veltrente sprintere, og la dem løpe 100 m. Deretter ser vi om gjennomsnittstiden for de som bruker den nye typen sko er signifikant bedre enn gjennomsnittstiden for de som bruker den gamle typen. (Løperne må ikke vite hvilken type de bruker). Da har vi *to uavhengige utvalg*.

2. Vi kan la *en* gruppe sprintere løpe 100 m to ganger, en gang med den gamle typen og en gang med den nye. Deretter ser vi på *forbedringen* for hver sprinter når de bruker den nye typen, og ser om det i gjennomsnitt er signifikant forbedring. (Vi må sørge for at løperne ikke vet når de har den nye og når de har den gamle typen, og at halvparten av dem løper først med den gamle typen og den andre halvparten først med den nye). Da har vi *samhørende par*.

Som regel bør vi bruke metoden med samhørende par dersom det er mulig, fordi vi på den måten eliminerer tilfeldige forskjeller mellom utvalgene. I praksis er det imidlertid mest vanlig å bruke metoden med to uavhengige utvalg. Uansett metode koker det hele ned til å bruke vanlige teknikker for å sette opp konfidensintervall og for å teste hypoteser. Jeg vil forutsette at disse teknikkene er kjent, og vil derfor konsentrere meg om å finne de størrelsene som du må kjenne for å kunne beregne feilmarginen i konfidensintervallet og testobservatoren ved hypotesetest.

I dette notatet skal jeg ta for meg sammenlikning av prosentandeler og av middelverdier i to populasjoner. Jeg skal ikke behandle sammenlikning av varianser i to utvalg, selv om dette i praksis er en svært aktuell problemstilling. Grunnen er at sammenlikning av varianser krever at vi introduserer en ny sannsynlighetsfordeling (F-fordelingen). Jeg synes at det blir for mye innenfor vårt pensum.

9.2. Prosentandel i to populasjoner.

Situasjonen er denne: I en populasjon har en prosentandel p_1 en bestemt egenskap. I en annen populasjon har en prosentandel p_2 denne egenskapen. Vi er interessert i *forskjellen*

$$\Delta p = p_1 - p_2 .$$

Med denne problemstillingen er det kun mulig å bruke metoden med to utvalg, ett fra hver populasjon. Dersom størrelsene på utvalgene er henholdsvis n_1 og n_2, og henholdsvis x_1 og x_2 av disse har egenskapen, får vi (som vanlig) disse estimatene for p_1 og p_2:

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \quad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}.$$

Beste estimat for forskjellen er

$$\Delta\hat{p} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 .$$

Både x_1 og x_2 er binomisk fordelt. Dersom betingelsen for normal-tilnærmelse for de binomiske fordelingene er oppfylt, vil estimatene $\Delta\hat{p}$ være normalfordelt med den virkelige verdien Δp som middelverdi. Variansen for $\Delta\hat{p}$ blir:

$$\sigma_{\Delta\hat{p}}^{\ 2} = \sigma_{\hat{p}_1}^{\ 2} + (-1)^2 \sigma_{\hat{p}_2}^{\ 2} = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}.$$

Men her har vi et problem: Vi kjenner verken p_1 eller p_2!! Hva gjør vi da?
Det naturlige svaret er at vi erstatter p_1 og p_2 med sine estimater. Og i de fleste situasjonene gjør vi nettopp det. Men det er et viktig unntak som ofte forekommer: Dersom vi tester en hypotese der nullhypotesen går ut på at $p_1 = p_2 = p$, kan vi estimere p med

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}.$$

Da blir

$$\hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}}^{\ 2} = \hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Nå har vi alt vi trenger for å beregne konfidensintervall og utføre hypotesetester. Framgangsmåten er summert opp nedenfor:

La andelene som har en bestemt egenskap i to populasjoner være p_1 og p_2, med differens $\Delta p = p_1 - p_2$. Vi trekker tilfeldige utvalg på n_1 og n_2 objekter fra hver av de to populasjonene, og finner at henholdsvis x_1 og x_2 av disse har egenskapen. Vi får da disse estimatene:

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}, \qquad \Delta\hat{p} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 .$$

Generelt er

$$\hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}}^{\ 2} = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2},$$

men dersom $p_1 = p_2 = p$ bruker vi

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

og

$$\hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}}^{\ 2} = \hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

Konfidensintervall: $\left[\Delta\hat{p} - E,\ \Delta\hat{p} + E\right]$ der $E = z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}}$.

Hypotesetest: Testparameteren $z = \dfrac{\Delta\hat{p} - \Delta p}{\hat{\sigma}_{\Delta p}}$ er standard normalfordelt.

La oss illustrere dette med et eksempel:

Eksempel 9.1: I en by hadde myndighetene sett seg lei på at biler med kun en person i fylte opp gatene. Av et tilfeldig utvalg på $n_1 = 2000$ biler var det bare $x_1 = 655$ som hadde minst to passasjerer. Det ble satt i gang en kampanje for å få folk til å sitte på med hverandre istedenfor at alle kjører med sin egen bil. Etter at kampanjen var avsluttet, fant man at av et tilfeldig utvalg på $n_2 = 1500$ biler var det $x_2 = 576$ som hadde minst to passasjerer.

a) Undersøk om andelen av biler med minst to passasjerer var større etter kampanjen enn før. Bruk signifikansnivå $\alpha = 0.05$.
b) Sett opp et 95 % konfidensintervall for økingen av andelen med minst to passasjerer.

Løsning:

a) Andelen av biler med minst to passasjerer er p_1 før kampanjen og p_2 etter. Vi setter opp disse hypotesene:

$$H_0:\ p_2 = p_1 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 - p_1 = 0.$$

$$H_1:\ p_2 > p_1.$$

Vi får at

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{655}{2000} = \underline{0.3275}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{576}{1500} = \underline{0.3840}.$$

Under H_0 er

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{655 + 576}{2000 + 1500} = \underline{0.3517},$$

og

$$\hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}}^{\ 2} = \hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) = 0.3517(1-0.3517)\left(\frac{1}{2000} + \frac{1}{1500}\right) = \underline{0.000266}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}} = \sqrt{0.000266} = \underline{0.0163}$$

Testobservator blir

$$z = \frac{\Delta\hat{p} - \Delta p}{\sigma_{\Delta\hat{p}}} = \frac{(0.3840 - 0.3275) - 0}{0.0163} = \underline{3.466}.$$

Med signifikansnivå $\alpha = 0.05$, blir $z_\alpha = 1.645$. Vår testobservator ligger langt inne i det kritiske området, slik at vi forkaster H_0 og fastslår at andelen av biler med minst to passasjerer har økt. (Men vi har ikke dermed bevist at dette skyldes *kampanjen*. Det kan være andre årsaker.)

b) Med et 95 % konfidensintervall blir $z_{\alpha/2} = 1.96$. Siden vi ikke har at $p_1 = p_2$, kan vi ikke bruke den verdien av $\hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}}$ som vi fant ovenfor. Vi må isteden bruke

$$\hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}}{}^2 = \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2} = \frac{0.3275(1-0.3275)}{2000} + \frac{0.3840(1-0.3840)}{1500}$$

$$= \underline{0.0002678} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}} = \underline{0.0164}$$

(Forskjellen fra i sted er mikroskopisk, men prinsipper er prinsipper…).
Feilmarginen blir

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\Delta\hat{p}} = 1.96 \cdot 0.0164 = \underline{0.0321}$$

Estimert endring i andel er

$$\Delta\hat{p} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1 = 0.3840 - 0.3275 = \underline{0.0565},$$

slik at konfidensintervallet blir

$$\left[\Delta\hat{p} - E,\ \Delta\hat{p} + E\right] = \left[0.0565 - 0.0321,\ 0.0565 + 0.0321\right] = \underline{\underline{\left[0.0244,\ 0.0866\right]}}.$$

Andel biler med minst to passasjerer har (med 95 % konfidens) økt med et sted mellom 2.44 % og 8.66 %. Merk at konfidensintervallet ikke direkte kan sammenliknes med hypotesetesten fordi størrelsen av "halen" i z-fordelingen ikke er den samme i de to tilfellene.

9.3. Sammenlikning av middelverdier – to uavhengige utvalg.

La meg innlede med et eksempel: Ved en høyskole skal to lærere i fellesskap ta seg av undervisningen av en stor gruppe studenter. Lærer 1 sier at "La oss bruke denne boka. Den er utmerket!". Lærer 2 sier da "Den boka??? Helt elendig. La oss heller bruke denne" og kommer med en annen bok. Ledelsen blir etter hvert lei av krangelen, og bestemmer at den store gruppa studenter deles i to. Lærer 1 underviser den ene gruppa med sin bok, og lærer 2 underviser den andre gruppa med sin bok. Til eksamen får man se hvem som får best resultat.

Dersom eksamensresultatene skal danne grunnlag for en beslutning om hvilken lærer/bok man skal satse på i framtiden, må man gjøre visse antakelser:

- Gruppa til lærer 1 er et *tilfeldig utvalg* fra en populasjon av studenter som har vært, blir, og vil bli undervist av lærer 1 med sin bok.
- Gruppa til lærer 2 er et *tilfeldig utvalg* fra en populasjon av studenter som har vært, blir, og vil bli undervist av lærer 2 med sin bok.

Anta at eksamensresultatene framkommer som poeng på en skala fra 0 (helt blank) til 100 (alt perfekt). Vi ønsker å sammenlikne gjennomsnitts-poeng i de to gruppene. Vi innfører da disse symbolene:

- La μ_1 og μ_2 stå for gjennomsnitt mens σ_1 og σ_2 står for standardavvik i henholdsvis *populasjon* 1 og *populasjon* 2.
- De to *utvalgene* (gruppene) består av henholdsvis n_1 og n_2 studenter. Gjennomsnitt til eksamen for de to gruppene er $\overline{x}_1$ og $\overline{x}_2$, mens standardavvikene er s_1 og s_2.

Vi går nå fram til den dagen da eksamensresultatene foreligger. Anta at vi får disse dataene:

Gruppe 1: Antall studenter $n_1 = 13$. Middelverdi $\overline{x}_1 = 65.2$. Standardavvik $s_1 = 18.6$.

Gruppe 2: Antall studenter $n_2 = 15$. Middelverdi $\overline{x}_2 = 53.8$. Standardavvik $s_1 = 15.8$.

Tilsynelatende er dette en knusende seier for lærer 1. Hun har jo fått mye bedre resultat enn den stakkars lærer 2. Men kan dette skyldes statistiske tilfeldigheter? Legg merke til at det er forholdsvis små utvalg, og at vi tenker oss at det er *tilfeldige* utvalg. Hva vil skje med middel-verdien dersom tilfeldighetene fører til at et par av hennes beste studenter erstattes av dumpe-kandidater? Vi må nok foreta en grundigere undersøkelse for å avgjøre om de forskjellene som registreres til eksamen mellom de to gruppene kan være utslag av slike tilfeldige fluktuasjoner, eller om det er det en reell forskjell mellom *populasjonene*.

Vi ønsker å undersøke eventuelle forskjeller mellom *populasjonene*, d.v.s. at vi er interessert i

$$\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 .$$

Vi utfører denne undersøkelsen på grunnlag av forskjellen mellom *utvalgene*, d.v.s.

$$\Delta\overline{x} = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 65.2 - 53.8 = \underline{11.4} .$$

Rent praktisk skal vi utføre undersøkelsen ved å løse to forskjellige oppgaver:

a) Sett opp et 95 % konfidensintervall for $\Delta\mu$.

b) Test hypotesen

$$H_1 :\ \mu_1 > \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 - \mu_2 > 0$$

mot

$$H_0 :\ \mu_1 = \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 - \mu_2 = 0 .$$

Bruk signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

For å komme videre, må vi anta at både $\overline{x}_1$ og $\overline{x}_2$ er normalfordelt. Dette kravet er oppfylt dersom karakterene i begge gruppene er normalfordelt, eller dersom begge gruppene er så store at sentralgrensesetningen gjelder. Da er også $\Delta\overline{x}$ normalfordelt.
Videre er variansen til $\Delta\overline{x}$ gitt ved

$$\sigma_{\Delta\overline{x}}{}^2 = \sigma_{\overline{x}_1}{}^2 + (-1)^2 \sigma_{\overline{x}_2}{}^2 = \frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2} .$$

Hvis vi nå kjenner σ_1 og σ_2, er alt greit. Men det gjør vi nesten aldri. Hva gjør vi da??

Så vidt jeg vet, er det ingen som har funnet et eksakt, fullgodt svar på dette problemet. Det fins flere tilnærmede metoder som gir brukbare resultater i praksis. Vi skal se på to slike metoder:

1. Erstatt σ_1 og σ_2 med s_1 og s_2. Bruk deretter *t*-fordeling, der antall frihetsgrader er det *minste* tallet av n_1-1 og n_2-1. Det fins andre og mer nøyaktige måter å fastsette antall frihetsgrader på, men vi skal ikke benytte disse. Denne metoden anbefales dersom du har store utvalg, helst $n_1 \geq 30$ og $n_2 \geq 30$.

2. Dersom det er grunn til å anta at $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_P$ der σ_P står for "Pooled Standard Deviation", beregner du
$$\hat{\sigma}_P^{\,2} = \frac{(n_1-1)s_1^{\,2}+(n_2-1)s_2^{\,2}}{n_1+n_2-2}.$$
Videre bruker du *t*-fordeling med n_1+n_2-2 frihetsgrader. Mange statistikere misliker denne metoden, men den kan være et "minste onde" dersom du har små utvalg.

De små utvalgene skaffer oss problemer. Egentlig er utvalgene for små til at vi med god samvittighet kan bruke metode 1 og si at
$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}^{\,2} = \frac{s_1^{\,2}}{n_1}+\frac{s_2^{\,2}}{n_2} = \frac{18.6^2}{13}+\frac{15.8^2}{15} = 43.255 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{43.255} = \underline{6.58}$$
og bruke *t*-fordeling med $13-1=12$ frihetsgrader. Alternativet er å bruke metode 2 der vi antar at begge *populasjonene* har samme varians $\sigma_P^{\,2}$, og at beste estimat for $\sigma_P^{\,2}$ er gitt ved
$$\hat{\sigma}_P^{\,2} = \frac{(n_1-1)s_1^{\,2}+(n_2-1)s_2^{\,2}}{n_1+n_2-2} = \frac{(13-1)\cdot 18.6^2+(15-1)\cdot 15.8^2}{13+15-2} = 294.1.$$
Deretter finner vi $\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}^{\,2}$ av
$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}^{\,2} = \hat{\sigma}_P^{\,2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) = 294.1\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right) = 42.23 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{42.23} = \underline{6.50}$$
og bruker *t*-fordeling med $13+15-2=26$ frihetsgrader.

Vi ser at forskjellen i verdi for $\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}$ er ikke stor. Men metode 1 gir litt større standardavvik. Dessuten må vi bruke færre frihetsgrader, noe som også bidrar til større konfidensintervall og større kritisk *t*-verdi i hypotesetesten. Som de forsiktige mennesker vi er, satser vi på denne metoden.

Nå er vi klar til å løse problemene.

a) Et 95 % konfidensintervall for $\Delta\mu$ er av formen
$$[\Delta\bar{x}-E,\ \Delta\bar{x}+E]$$
der
$$E = t_{\alpha/2}\cdot\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}} = 2.179\cdot 6.58 = \underline{14.34}$$
slik at konfidensintervallet blir
$$[11.4-14.34,\ 11.4+14.34] = \underline{\underline{[-2.94,\ 25.74]}}.$$

Vi ser at $\Delta\mu = 0$ ligger innenfor dette konfidensintervallet. Vi kan derfor ikke utelukke at de to *populasjonene* har samme middelverdi selv om det er stor forskjell på middelverdien i *utvalgene*.

b) Den naturlige testobservatoren i en hypotesetest er

$$t = \frac{\Delta\bar{x} - \Delta\mu}{\sigma_{\Delta\bar{x}}} = \frac{11.4 - 0}{6.58} = \underline{1.73}.$$

Med $\alpha = 0.05$, 12 frihetsgrader og ensidig *t*-test får vi en kritisk verdi $t = 1.782$. Vi ser at vår *t*-verdi ikke ligger i det kritiske området (men det er nære på). Vi kan derfor ikke forkaste nullhypotesen, og kan da heller ikke si at *populasjon*1 har bedre gjennomsnitt enn *populasjon* 2.

Vi summerer opp:

Anta at middelverdiene i to populasjoner er henholdsvis μ_1 og μ_2, der vi er interessert i differensen $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$. Vi beregner middelverdiene $\bar{x}_1$ og $\bar{x}_2$ basert på tilfeldige utvalg på henholdsvis n_1 og n_2 objekter fra de to populasjonene. Beste estimat for $\Delta\mu$ er da

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

som vi antar er normalfordelt.
Dersom $n_1 \geq 30$ og $n_2 \geq 30$, benytter vi

$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}^{\ 2} = \frac{s_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{s_2^{\ 2}}{n_2}$$

og *t*-fordeling med det *minste* tallet av $n_1 - 1$ og $n_2 - 1$ som antall frihetsgrader
Dersom disse kravene ikke er oppfylt, kan vi anta at $\sigma_1 = \sigma_2$ og bruke ”Pooled Standard Deviation”

$$\hat{\sigma}_P^{\ 2} = \frac{(n_1 - 1)s_1^{\ 2} + (n_2 - 1)s_2^{\ 2}}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Deretter finner vi $\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}^{\ 2}$ av

$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}^{\ 2} = \hat{\sigma}_P^{\ 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

og bruker *t*-fordeling med $n_1 + n_2 - 2$ frihetsgrader.
Konfidensintervall: $\left[\Delta\bar{x} - E,\ \Delta\bar{x} + E\right]$ der $E = t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}$.
Hypotesetest: Testobservator $t = \dfrac{\Delta\bar{x} - \Delta\mu}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$.

9.4. Sammenlikning av middelverdier – samhørende par.

Med jevne mellomrom dukker det opp ulike tilsetningsstoffer som skal forbedre bensinens egenskaper. For å teste et slikt stoff, ble 10 biler av forskjellig type kjørt samme strekning to ganger med samme fører, en gang med vanlig bensin og en gang med bensin tilsatt vidunder-middelet. Bensinforbruket for de 10 bilene ble registrert for hver tur. Tabellen nedenfor viser resultatene (eksemplet er knabbet fra en amerikansk bok, så målingene er i miles per gallon).

Bil nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Med tilsetning	25.7	20.0	28.4	13.7	18.8	12.5	28.4	8.1	23.1	10.4
Uten tilsetning	24.9	18.8	27.7	13.0	17.8	11.3	27.8	8.2	23.1	9.9
Differanse *d*	0.8	1.2	0.7	0.7	1.0	1.2	0.6	-0.1	0.0	0.5

I utgangspunktet kan vi tenke oss at vi har to utvalg fra hver sin populasjon: forbruk med tilsetning og forbruk uten tilsetning. Men vi har innrettet oss slik at vi har fått *samhørende par*, og kan finne et sett *differanser*. Disse differansene kan vi nå oppfatte som et tilfeldig utvalg fra en populasjon av slike differanser. Dermed har vi oppnådd to ting:

- Vi har eliminert variasjon *innen* hvert utvalg.
- Vi har redusert problemet til et problem med kun ett utvalg fra en populasjon.

Anta nå at i *populasjonen* av differanser er gjennomsnitts-differansen μ og standardavviket for differansene σ. Anta også at differansene er normalfordelt eller at sentralgrenseteoremet gjelder. Vi skal nå bruke dataene i tabellen til å løse disse problemene:

a) Sett opp et 90 % konfidensintervall for μ.

b) Test hypotesen
$H_1: \ \mu > 0$
mot
$H_0: \ \mu = 0$.
Bruk signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Disse problemstillingene kjenner vi fra før. Vi beregner gjennomsnittsverdien for *d*, og får

$$\bar{d} = \frac{1}{10}\left(0.8 + 1.2 + \cdots + 0.5\right) = 0.66 .$$

Standardavviket for *d* er

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{10-1}\left(0.8^2 + 1.2^2 + \cdots + 0.5^2 - 10 \cdot 0.66^2\right)} = 0.443 .$$

Vi kjenner ikke standardavviket σ i populasjonen, men bruker s_d som estimat for σ. Vi må da bruke et estimat også for standardavviket for $\bar{d}$, og bruker

$$\hat{\sigma}_{\bar{d}} = s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{0.443}{\sqrt{10}} = 0.14 .$$

Siden vi bruker *estimat* for populasjonens standardavvik, må vi benytte *t*-fordeling med $10 - 1 = 9$ frihetsgrader.

a) Konfidensintervallet er på formen
$\left[\bar{d} - E, \ \bar{d} + E\right]$
der
$E = t_{\alpha/2} \cdot s_{\bar{d}} = 1.833 \cdot 0.14 = 0.256$.
Konfidensintervallet blir da
$\left[0.66 - 0.256, \ 0.66 + 0.256\right] = \underline{\underline{\left[0.404, \ 0.916\right]}}$.
Dette tyder på at tilsetningsstoffet virkelig øker kjørelengden.

b) Den naturlige test-observatoren er

$$t = \frac{\bar{d} - \mu}{\sigma_{\bar{d}}}.$$

Under H_0 er $\mu = 0$. Videre erstatter vi $\sigma_{\bar{d}}$ med $s_{\bar{d}}$, og får

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{s_{\bar{d}}} = \frac{0.66 - 0}{0.14} = 4.71.$$

Den kritiske verdien er $t_{0.05} = 1.833$, slik at vi ligger langt inne i det kritiske området. Vi forkaster da H_0, og slår fast at på vårt signifikansnivå kan vi si at tilsetningsstoffet øker kjørelengden.

Vi summerer opp:

Vi trekker *n* tilfeldige samhørende par fra en populasjon. Anta at gjennomsnitts-differensen mellom tallene i et par i populasjonen er μ, og at gjennomsnitts-differensen mellom tallene i et par i utvalget er $\bar{d}$. Beste estimat for standardavviket til $\bar{d}$ er

$$\hat{\sigma}_{\bar{d}} = s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

der s_d er standardavviket til alle differansene i utvalget. Dersom $\bar{d}$ er normalfordelt, kan vi nå bruke *t*-fordeling med $n-1$ frihetsgrader.
Konfidensintervall: $\left[\bar{d} - E, \bar{d} + E\right]$ der $E = t_{\alpha/2} \cdot s_{\bar{d}}$.

Hypotesetest: Testobservator $t = \frac{\bar{d} - \mu}{s_{\bar{d}}}$.