

## 12. Statistisk prosesskontroll.

### 12.1. Innledning.

De siste 20 – 30 årene er produksjonsstyring og kvalitetskontroll blitt stadig viktigere. I den forbindelse tas det i bruk statistiske metoder. Disse metodene benyttes bl.a. til å skille mellom normale statistiske fluktuasjoner, og variasjoner som skyldes andre (oftest uønskede) forhold. Man kan da oppnå flere ting, for eksempel:

- Under vanlig drift er det viktig å stanse produksjonen dersom den kommer ut av kontroll (vi skal senere i notatet diskutere hva som menes med ”ut av kontroll”). Men en slik produksjonsstans er kostbar, og man må unngå stans ved naturlige statistiske fluktuasjoner.
- Ved etterkontroll av produksjonsprosessen er det nyttig å kunne peke ut ”mistenkelige” forhold, slik at man kan finne årsaken og dermed redusere risikoen for at feil gjentar seg.

Dette er et forholdsvis nytt felt av statistikken, og det kommer stadig nye og forbedrede metoder. Fagfolkene er ikke alltid enige om hva som er ”rett” eller ”best” metode. I dette notatet skal jeg ta for meg noen metoder som er allment brukt. Men vær klar over at det fins mange varianter av disse metodene.

Et fellestrekk ved disse metodene er at prosessen overvåkes over tid. Man ønsker å kontrollere at prosessen holder seg stabil, uten vesentlige endringer når tiden går. Man sjekker bl.a. at variasjonen holder seg innenfor akseptable grenser. Disse grensene må fastsettes på grunnlag av statistiske observasjoner, og har intet med produkt-spesifikasjonene å gjøre.

Statistisk prosesskontroll har vært så vellykket at teknikkene er i ferd med å bli tatt i bruk også på andre felt. Også økonomiske, sosiale og politiske ”prosesser” blir i dag analysert med de samme teknikkene.

### 12.2. ”Run charts”.

Et av de enkleste hjelpemidlene er en grafisk oversikt over viktige prosess-parametre over tid. Slike grafer kalles gjerne ”run charts”. Anta at du skal kontrollere fyllingen av malingspenn hos en malingsprodusent. Da kan du veie hvert spenn etter hvert som de fylles, og lage en grafisk oversikt over hvordan vekten varierer med tiden. Du må alltid forvente en viss variasjon. Men du bør bli mistenksom dersom du oppdager noe av dette:

- En økende eller avtakende trend.
- Et markert, varig sprang.
- En enkeltstående, sterkt avvikende verdi.
- Et syklisk mønster.
- En økende variasjon.

Bruken av disse kriteriene baseres i noen grad på skjønn. Men det fins et par håndfaste regler for hendelser som er ”mistenkelige”:

- 6 etterfølgende punkter som alle er stigende eller alle synkende.
- 14 etterfølgende punkter som alternerer opp, ned, opp, ned, ...

### 12.3. Kontrolldiagram.

Selv om ”run charts” er nyttige hjelpemidler, trenger vi noe som er både enklere og mer håndfast. Her kommer **kontrolldiagrammene** inn i bildet. Vi skal ta for oss to typer:

- Kontrolldiagram for middelværdi.
- Kontrolldiagram for variasjon.

Begge disse diagrammene forutsetter at du tar *tilfeldige stikkprøver* av produksjonen. Hver stikkprøve består av  $n$  målinger. For hver slik stikkprøve beregnes middelværdien  $\bar{x}$  og forskjellen  $R$  mellom største og minste verdi.  $R$  (rang) er et mål for spredning, og benyttes istedenfor standardavvik bl.a. fordi  $R$  er lettere å beregne.

Etter at du har tatt en rekke slike stikkprøver, kan du beregne *middelværdien* av middelværdiene for hver stikkprøve. Denne størrelsen skrives  $\bar{\bar{x}}$ , og kan oppfattes som et estimat for middelværdien ved normal produksjon. Du kan også beregne middelværdien av  $R$ , som skrives  $\bar{R}$ . Denne verdien er på samme måte et estimat for spredningen ved normal produksjon.

Nå er du i stand til å lage kontrolldiagrammer slik:

Et kontrolldiagram for  $\bar{x}$  består av en grafisk framstilling av  $\bar{x}$  som funksjon av tid, sammen med en *øvre* og en *nedre kontrollgrense* ( $UCL$  og  $LCL$ ). Disse kontrollgrensene beregnes slik:

$$\text{Øvre kontrollgrense } UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} .$$

$$\text{Nedre kontrollgrense } LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} .$$

Her er  $A_2$  et tall som hentes fra en tabell.

$A_2$  er beregnet slik at kontrollgrensene blir liggende omtrent 3 standardavvik over og under  $\bar{\bar{x}}$ . Dette medfører at ved normal drift vil omtrent 99.7 % av alle observasjoner av  $\bar{x}$  ligge innenfor kontrollgrensene.

Et kontrolldiagram for  $R$  består av en grafisk framstilling av  $R$  som funksjon av tid, sammen med en *øvre* og en *nedre kontrollgrense* ( $UCL$  og  $LCL$ ). Disse kontrollgrensene beregnes slik:

$$\text{Øvre kontrollgrense } UCL = D_4 \cdot \bar{R} .$$

$$\text{Nedre kontrollgrense } LCL = D_3 \cdot \bar{R} .$$

Her er  $D_3$  og  $D_4$  tall som hentes fra en tabell.

Tallene  $D_3$  og  $D_4$  er beregnet slik at kontrollgrensene blir liggende omtrent 3 standardavvik over og under  $\bar{R}$ . Dette medfører at ved normal drift vil omtrent 99.7 % av alle observasjoner av  $R$  ligge innenfor kontrollgrensene.

Med utgangspunkt i kontrolldiagrammene har vi flere kriterier på at en prosess er blitt statistisk ustabil:

- Et punkt ligger utenfor kontrollgrensene.
- 8 etterfølgende punkter ligger alle over (eller alle under) midtlinja.

**Eksempel 12.1:** Vi tar 25 tilfeldige stikkprøver fra en produksjonsserie, der hver prøve består av 6 målinger. I tabellen nedenfor finner du de enkelte verdiene, middelverdier, og rang. Undersøk om disse stikkprøvene gir grunn til uro.

| Prøve nr. | X1     | X2     | X3     | X4     | X5     | X6     | X-middel | Range |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|-------|
| 1         | 98,07  | 100,17 | 101,23 | 101,49 | 96,94  | 93,38  | 98,55    | 8,11  |
| 2         | 85,82  | 99,66  | 110,20 | 101,98 | 102,69 | 105,62 | 101,00   | 24,38 |
| 3         | 97,45  | 91,87  | 101,39 | 95,21  | 99,00  | 99,94  | 97,48    | 9,52  |
| 4         | 98,97  | 104,10 | 110,17 | 103,49 | 93,94  | 98,68  | 101,56   | 16,23 |
| 5         | 103,18 | 107,41 | 104,53 | 106,14 | 100,95 | 86,31  | 101,42   | 21,10 |
| 6         | 95,77  | 106,25 | 97,47  | 91,13  | 91,55  | 101,18 | 97,22    | 15,11 |
| 7         | 95,80  | 96,46  | 95,89  | 100,95 | 101,47 | 102,35 | 98,82    | 6,55  |
| 8         | 100,19 | 101,94 | 101,88 | 110,88 | 106,20 | 95,99  | 102,85   | 14,88 |
| 9         | 95,71  | 103,06 | 96,51  | 94,33  | 98,46  | 105,47 | 98,92    | 11,14 |
| 10        | 97,87  | 103,45 | 102,11 | 106,75 | 97,44  | 90,99  | 99,77    | 15,76 |
| 11        | 101,94 | 96,76  | 107,86 | 97,02  | 106,54 | 97,07  | 101,20   | 11,10 |
| 12        | 98,96  | 101,06 | 103,22 | 101,34 | 101,31 | 100,40 | 101,05   | 4,26  |
| 13        | 98,33  | 97,55  | 101,90 | 92,28  | 97,60  | 97,32  | 97,50    | 9,62  |
| 14        | 108,66 | 94,99  | 100,02 | 101,76 | 96,54  | 97,95  | 99,99    | 13,67 |
| 15        | 107,03 | 96,10  | 104,01 | 99,79  | 97,19  | 98,46  | 100,43   | 10,94 |
| 16        | 101,14 | 87,42  | 101,13 | 106,69 | 100,50 | 109,48 | 101,06   | 22,06 |
| 17        | 107,43 | 94,30  | 97,24  | 93,73  | 101,09 | 98,09  | 98,65    | 13,70 |
| 18        | 109,08 | 97,20  | 102,05 | 100,50 | 98,43  | 100,40 | 101,28   | 11,88 |
| 19        | 96,88  | 98,37  | 106,29 | 112,05 | 101,81 | 100,79 | 102,70   | 15,16 |
| 20        | 101,80 | 90,40  | 92,45  | 102,40 | 94,44  | 105,25 | 97,79    | 14,85 |
| 21        | 91,43  | 97,07  | 93,21  | 104,41 | 101,42 | 100,58 | 98,02    | 12,98 |
| 22        | 99,65  | 104,04 | 95,87  | 98,47  | 100,28 | 104,81 | 100,52   | 8,94  |
| 23        | 109,17 | 91,48  | 104,99 | 99,26  | 107,60 | 96,83  | 101,55   | 17,69 |
| 24        | 96,69  | 101,93 | 110,93 | 87,42  | 100,95 | 98,09  | 99,34    | 23,51 |
| 25        | 108,09 | 103,47 | 107,39 | 107,77 | 104,35 | 100,42 | 105,25   | 7,67  |

Løsning: Vi utfører de nødvendige beregningene:

$$\bar{\bar{x}} = 100.16.$$

$$\bar{R} = 13.63.$$

På dette grunnlaget finner vi kontroll-grensene.

$$\text{For } \bar{\bar{x}} : UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = 100.16 + 0.483 \cdot 13.63 = \underline{106.74}.$$

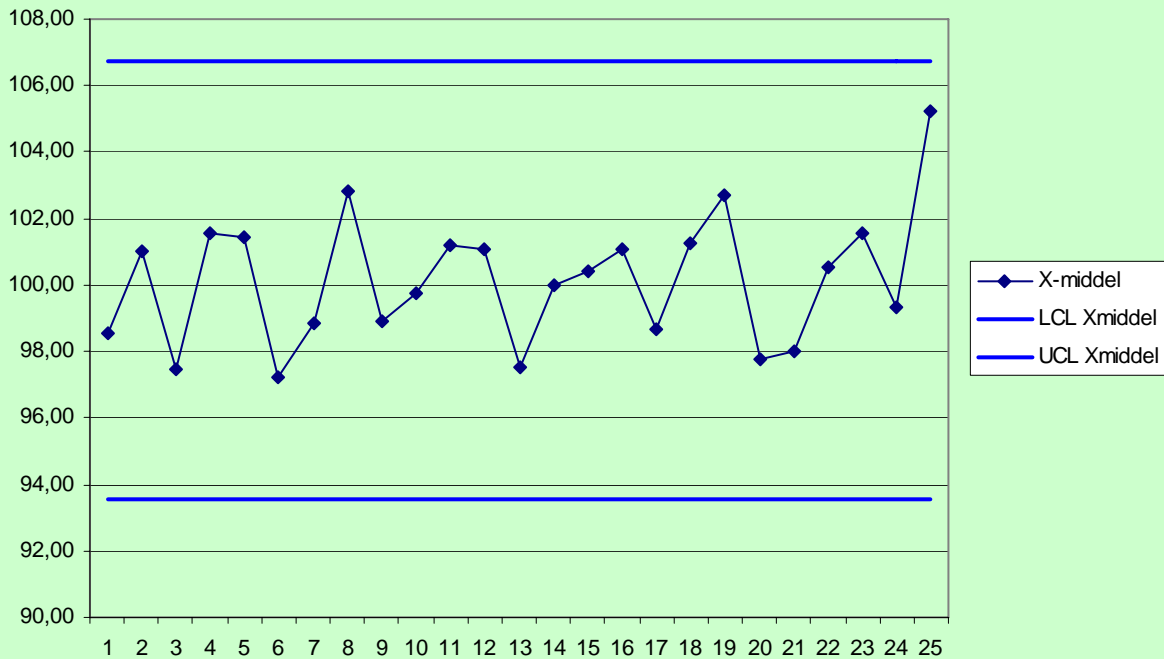
$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = 100.16 - 0.483 \cdot 13.63 = \underline{93.57}.$$

$$\text{For } R : UCL = D_4 \cdot \bar{R} = 2.004 \cdot 13.63 = \underline{27.32}.$$

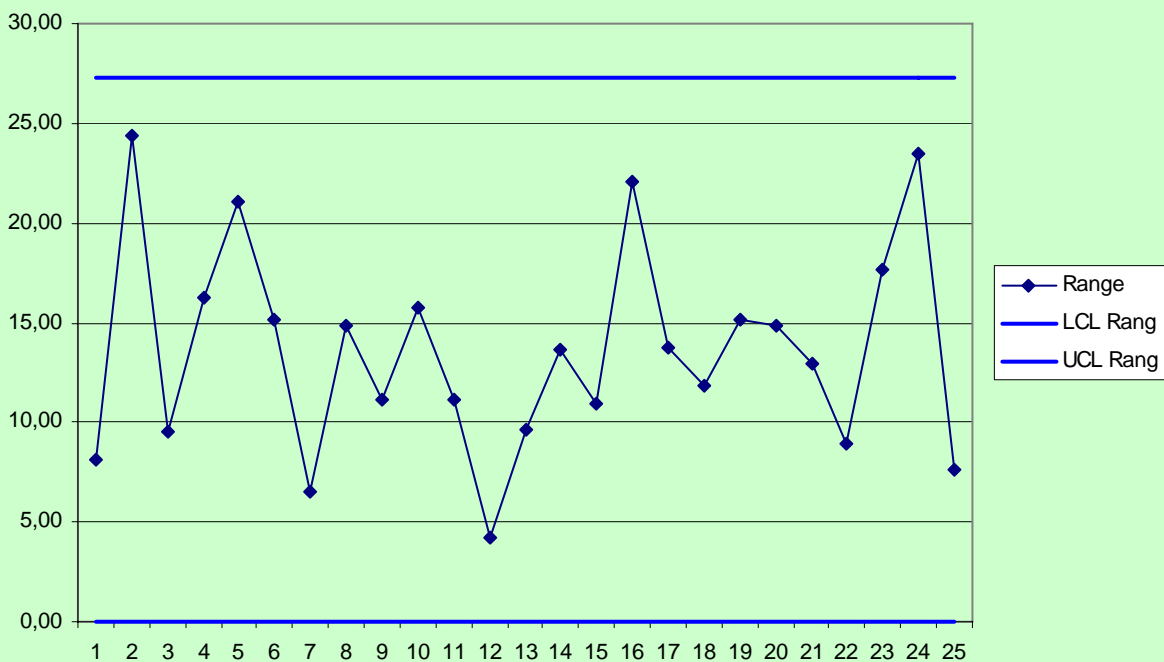
$$LCL = D_3 \cdot \bar{R} = 0 \cdot 13.63 = \underline{0}.$$

Nå kan vi tegne de kontroll-diagrammene som du finner på neste side. Du ser at diagrammene indikerer at prosessen er under statistisk kontroll. Alle verdiene er innenfor kontrollgrensene, og det er heller ingen andre tegn på urovekkende tendenser.

Kontrolldiagram for middelerverdi



Kontrolldiagram for Range



Du kan hente [regnearket](#) som er benyttet til å utføre disse beregningene.

### 12.4. Kontrolldiagram for prosentandel.

Vi kan sette opp kontrolldiagram for prosentandel på samme måte som for middelerdi og rang. Vi tar også nå stikkprøver med størrelse  $n$  i hvert utvalg. La  $p_i$  være den andelen av prøve nr  $i$  som har en bestemt egenskap. Beregn middelerdien  $\bar{p} = \frac{\sum p_i}{n}$  der du summerer over alle stikkprøvene. Kontrollgrensene beregnes nå slik:

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}.$$

Dersom beregningen gir en  $UCL$  som er større enn 1, brukes  $UCL = 1$ .

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}.$$

Dersom beregningen gir en  $LCL$  som er mindre enn 0, brukes  $LCL = 0$ .

For øvrig går vi fram på samme måte som før.

Denne teknikken er egentlig utarbeidet for å kontrollere for eksempel defekt-andel i en produksjonsprosess. Men teknikken kan like godt brukes til å overvåke for eksempel hvor stor andel av pasientene som blir helbredet av en bestemt sykdom. En "statistisk ustabil prosess" innebærer at helbredelses-raten endres.