2. Noen egenskaper ved Z-transformen.

Vi skal nå se på noen generelle egenskaper ved Z-transformen, og skal deretter bruke disse egenskapene til å utlede Z-transformene til noen vanlige tallfølger.

2.1. Linearitet.

Vi starter med den egenskapen som vi benytter oftest: ***Z-transformen er lineær***. Mer presist:

Vi har to tallfølger $\{x_k\}$ og $\{y_k\}$ som har Z-transformene $X(z)$ og $Y(z)$. Da er

$$Z\{a \cdot x_k + b \cdot y_k\} = a \cdot X(z) + b \cdot Y(z).$$

Bevis:

$$Z\{a \cdot x_k + b \cdot y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty}(a \cdot x_k + b \cdot y_k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot x_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b \cdot y_k z^{-k} = \underline{\underline{a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)}}.$$

Eksempel 2.1: En tallfølge $\{x_k\}$ er gitt ved $x_k = 5\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right),\ k = 0,1,2,\cdots$.
Finn Z-transformen til denne tallfølgen.

Løsning: Vi benytter lineariteten samt resultatene fra Eksempel 1.2 og Eksempel 1.3:

$$X(z) = Z\left\{5-5\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right\} = 5\cdot Z\{1\} - 5\cdot Z\left\{\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right\} = 5\cdot\frac{z}{z-1} - 5\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{5z}{z-1} - \frac{15z}{3z-1} = \frac{5z(3z-1)-15z(z-1)}{(z-1)(3z-1)} = \frac{15z^2-5z-15z^2+15z}{(z-1)(3z-1)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{10z}{(z-1)(3z-1)}}} = \underline{\underline{\frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})(3-z^{-1})}}} = \underline{\underline{\frac{\frac{10}{3}z^{-1}}{(1-z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}}}$$

Svaret er gitt i tre ulike versjoner fordi det noen ganger er hensiktsmessig å bruke en form, noen ganger en annen form.

Oppgave 2.1.

2.2. To spesielle setninger.

De to neste setningene er nyttige når vi skal finne Z-transformen til visse tallfølger:

En tallfølge $\{x_k\}$ har Z-transformen $X(z)$. Da gjelder:

- Tallfølgen $\{a^k \cdot x_k\}$ har Z-transformen $X\left(\frac{1}{a}z\right)$.
- Tallfølgen $\{k \cdot x_k\}$ har Z-transformen $-z \cdot \dfrac{dX(z)}{dz}$.

Bevis: Vi vet at

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + \cdots + x_k z^{-k} + \cdots.$$

Da blir

$$Z\{a^k x_k\} = x_0 + a x_1 z^{-1} + a^2 x_2 z^{-2} + a^3 x_3 z^{-3} + \cdots + a^k x_k z^{-k} + \cdots$$

$$= x_0 + x_1 \cdot \left(\tfrac{1}{a} z\right)^{-1} + x_2 \cdot \left(\tfrac{1}{a} z\right)^{-2} + x_3 \cdot \left(\tfrac{1}{a} z\right)^{-3} + \cdots + x_k \left(\tfrac{1}{a} z\right)^{-k} + \cdots = \underline{\underline{X\left(\tfrac{1}{a} z\right)}}$$

Så deriverer vi rekka for $X(z)$. Da får vi:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -x_1 z^{-2} - 2x_2 z^{-3} - 3x_3 z^{-4} - \cdots - k \cdot x_k z^{-k-1} - \cdots$$

$$= -z^{-1}\left(x_1 z^{-1} + 2x_2 z^{-2} + 3x_3 z^{-3} + \cdots + k \cdot x_k z^{-k} - \cdots\right)$$

$$= -z^{-1} \cdot Z\{k \cdot x_k\}$$

Nå gjenstår det bare å multiplisere begge sider med $-z$, og beviset er ferdig.

Eksempel 2.2: I Eksempel 1.2 viste vi at $Z\{1\} = \dfrac{z}{z-1}$. Bruk dette til å finne $Z\{a^k\}$.

Løsning:

$$Z\{a^k\} = Z\{a^k \cdot 1\} = \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - 1} = \underline{\underline{\frac{z}{z-a}}}.$$

Som ventet stemmer dette med resultatet i Eksempel 1.3, men regningene er jo mye enklere.

Vi skal nå finne Z-transformene til noen vanlige tallfølger:

Eksempel 2.3:

a) Finn Z-transformen til tallfølgene $\{k\}$ og $\{k^2\}$ ved å ta utgangspunkt i at

$$Z\{1\} = \frac{z}{z-1}.$$

b) Finn deretter Z-transformen til tallfølgen $\{k \cdot a^k\}$ på to forskjellige måter.

Løsning:

a)

$$Z\{k\} = Z\{k \cdot 1\} = -z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z \cdot \frac{1(z-1) - z \cdot 1}{(z-1)^2} = -z \frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{z}{(z-1)^2}}} = \underline{\underline{\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}}$$

$$Z\{k^2\} = Z\{k \cdot k\} = -z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = -z \cdot \frac{1 \cdot (z-1)^2 - z \cdot 2(z-1) \cdot 1}{(z-1)^4}$$

$$= -z \cdot \frac{(z-1)(z-1-2z)}{(z-1)^4} = -z \cdot \frac{-z-1}{(z-1)^3} = \underline{\underline{\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}}} = \underline{\underline{\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}}}$$

b) Vi kan ta utgangspunkt i $Z\{k\}$ og regne slik:

$$Z\{k\cdot a^k\} = Z\{a^k \cdot k\} = \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} = \underline{\underline{\frac{az}{(z-a)^2}}} = \underline{\underline{\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}}}.$$

Eller vi kan ta utgangspunkt i at

$$Z\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$$

som vi viste i Eksempel 2.2. Da blir

$$Z\{k\cdot a^k\} = -z\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z\cdot\frac{1(z-a)-z\cdot 1}{(z-a)^2} = -z\cdot\frac{-a}{(z-a)^2} = \underline{\underline{\frac{az}{(z-a)^2}}} = \underline{\underline{\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}}}.$$

Disse resultatene er så viktige at vi rammer dem inn:

$$Z\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$Z\{k^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

$$Z\{k\cdot a^k\} = \frac{az}{(z-a)^2} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

Oppgave 2.2.

2.3. Z-transform til et samplet signal.

Når en kontinuerlig funksjon $f(t),\ t \geq 0$ samples med samplingsintervall *T*, vil verdiene $f(0),\ f(T),\ f(2T),\ \ldots,\ f(kT),\ \ldots$ danne en tallfølge som kan Z-transformeres på vanlig måte. Vi får da Z-transformen

$$Z\{f(kT)\} = f(0) + f(T)\cdot z^{-1} + f(2T)\cdot z^{-2} + \cdots + f(kT)\cdot z^{-k} + \cdots.$$

Vi skal nå Z-transformere samplinger av noen vanlige funksjoner.

Eksempel 2.4: Finn Z-transformen til funksjonene nedenfor når de samples med samplings-intervall *T*:

a) $f(t) = t$

b) $f(t) = t^2$.

c) $f(t) = e^{\alpha t}$

d) $f(t) = t\cdot e^{\alpha t}$

Løsning: For alle funksjonene erstatter vi *t* med kT der $k = 0,1,2,\cdots$. Da får vi:

a) Tallfølgen blir

$$\{x_k\} = \{kT\} = T\cdot\{k\}$$

Ved å benytte at

$$Z\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

fra Eksempel 2.3a, får vi at

$$Z\{kT\} = T \cdot Z\{k\} = \underline{\underline{\frac{Tz}{(z-1)^2}}} = \underline{\underline{\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}}.$$

b) Tallfølgen blir

$$\{x_k\} = \{(kT)^2\} = T^2 \cdot \{k^2\}.$$

Ved å benytte at

$$Z\{k^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

fra Eksempel 2.3a, får vi at

$$Z\{T^2k^2\} = T^2 \cdot Z\{k^2\} = \underline{\underline{\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}}} = \underline{\underline{\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}}}$$

c) Tallfølgen blir

$$\{x_k\} = \{e^{\alpha \cdot kT}\} = \{(e^{\alpha T})^k\} = \{a^k\} \text{ der } a = e^{\alpha T}.$$

Fra Eksempel 1.3 har vi at $Z\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$, slik at

$$Z\{e^{\alpha kT}\} = Z\{(e^{\alpha T})^k\} = \underline{\underline{\frac{z}{z-e^{\alpha T}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{1-e^{\alpha T}z^{-1}}}}.$$

d) Tallfølgen blir

$$\{x_k\} = \{kT \cdot e^{\alpha \cdot kT}\} = T \cdot \{k(e^{\alpha T})^k\} = T \cdot \{k \cdot a^k\} \text{ der } a = e^{\alpha T}.$$

Fra Eksempel 2.3b har vi at

$$Z\{k \cdot a^k\} = \frac{az}{(z-a)^2},$$

slik at

$$Z\{kT \cdot e^{\alpha \cdot kT}\} = T \cdot Z\{k \cdot (e^{\alpha T})^k\} = \underline{\underline{\frac{T \cdot e^{\alpha T}z}{(z-e^{\alpha T})^2}}} = \underline{\underline{\frac{T \cdot e^{\alpha T}z^{-1}}{(1-e^{\alpha T}z^{-1})^2}}}.$$

Til slutt skal vi ta for oss sampling av sinus- og cosinus-funksjoner. Vi skal benytte et lite trick for å finne Z-transformene til disse tallfølgene:

Eksempel 2.5: Finn Z-transformene til $\{\sin(\omega \cdot kT)\}$ og $\{\cos(\omega \cdot kT)\}$.

Løsning: Vi benytter at

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta.$$

Da blir

$$Z\{e^{i \cdot \omega kT}\} = Z\{\cos(\omega kT) + i \cdot \sin(\omega kT)\} = Z\{\cos(\omega kT)\} + i \cdot Z\{\sin(\omega kT)\}$$

slik at

$$Z\{\cos\omega kT\} = \mathrm{Re}\left(Z\left\{e^{i\cdot\omega kT}\right\}\right), \qquad Z\{\sin\omega kT\} = \mathrm{Im}\left(Z\left\{e^{i\cdot\omega kT}\right\}\right).$$

Ved å benytte at

$$Z\left\{a^k\right\} = \frac{z}{z-a},$$

får vi at

$$Z\left\{e^{i\cdot\omega kT}\right\} = Z\left\{\left(e^{i\omega T}\right)^k\right\} = \frac{z}{z-e^{i\omega T}} = \frac{z}{z-\cos(\omega T) - i\cdot\sin(\omega T)}$$

$$= \frac{z\left((z-\cos(\omega T)) + i\cdot\sin(\omega T)\right)}{\left((z-\cos(\omega T)) - i\cdot\sin(\omega T)\right)\left((z-\cos(\omega T)) + i\cdot\sin(\omega T)\right)}$$

$$= \frac{z^2 - z\cos(\omega T) + i\cdot z\sin(\omega T)}{(z-\cos(\omega T))^2 + \sin^2(\omega T)}$$

$$= \frac{z^2 - z\cos(\omega T) + i\cdot z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + \cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T)}$$

$$= \frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} + i\cdot\frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

Dermed blir

$$Z\{\cos(\omega T)\} = \mathrm{Re}\left(Z\left\{e^{i\omega kT}\right\}\right) = \underline{\underline{\frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}}} = \underline{\underline{\frac{1-\cos(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1} + z^{-2}}}}.$$

$$Z\{\sin(\omega T)\} = \mathrm{Im}\left(Z\left\{e^{i\omega kT}\right\}\right) = \underline{\underline{\frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}}} = \underline{\underline{\frac{\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1} + z^{-2}}}}.$$

Vi avslutter med et siste eksempel:

Eksempel 2.6: Finn Z-transformene til $\left\{e^{\alpha kT}\sin(\omega\cdot kT)\right\}$ og $\left\{e^{\alpha kT}\cos(\omega\cdot kT)\right\}$.

Løsning: Her benytter vi resultatene i eksemplet foran, samt at når $Z\{x_k\} = X(z)$ så er

$$Z\left\{a^k\cdot x_k\right\} = X\left(\tfrac{1}{a}z\right).$$

Siden $e^{\alpha kT} = \left(e^{\alpha T}\right)^k$, kan vi direkte sette at

$$Z\left\{e^{\alpha kT}\cos(\omega T)\right\} = \frac{\left(e^{-\alpha T}\right)^2 z^2 - e^{-\alpha T}z\cos(\omega T)}{\left(e^{-\alpha T}\right)^2 z^2 - 2e^{-\alpha T}z\cos(\omega T) + 1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{z^2 - e^{\alpha T}\cos(\omega T)z}{z^2 - 2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z + e^{2\alpha T}}}} = \underline{\underline{\frac{1-e^{\alpha T}\cos(\omega T)z^{-1}}{1-2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z^{-1} + e^{2\alpha T}z^{-2}}}}$$

$$Z\left\{e^{\alpha kT}\sin(\omega T)\right\} = \frac{e^{-\alpha T}z\sin(\omega T)}{\left(e^{-\alpha T}\right)^2 z^2 - 2e^{-\alpha T}z\cos(\omega T) + 1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^{\alpha T}\sin(\omega T)z}{z^2 - 2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z + e^{2\alpha T}}}} = \underline{\underline{\frac{e^{\alpha T}\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z^{-1} + e^{2\alpha T}z^{-2}}}}$$

2.4. Tabell over Z-transformer.

Nå bør vi lage en oversikt over de viktigste av de Z-transformene som vi har funnet:

$\{x_k\}$	$Z\{x_k\}$
$\{1\}$	$\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}}$
$\{a^k\}$	$\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}$
$\{k\}$	$\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\{k^2\}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\{k\cdot a^k\}$	$\frac{az}{(z-a)^2}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$\{kT\}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\{(kT)^2\}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\{e^{\alpha\cdot kT}\}$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T}}=\frac{1}{1-e^{\alpha T}z^{-1}}$
$\{kT\cdot e^{\alpha\cdot kT}\}$	$\frac{T\cdot e^{\alpha T}z}{(z-e^{\alpha T})^2}=\frac{T\cdot e^{\alpha T}z^{-1}}{(1-e^{\alpha T}z^{-1})^2}$
$\{\cos(\omega kT)\}$	$\frac{z^2-\cos(\omega T)z}{z^2-2\cos(\omega T)z+1}=\frac{1-\cos(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$
$\{\sin(\omega kT)\}$	$\frac{\sin(\omega T)z}{z^2-2\cos(\omega T)z+1}=\frac{\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$
$\{e^{\alpha kT}\cos(\omega kT)\}$	$\frac{z^2-e^{\alpha T}\cos(\omega T)z}{z^2-2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z+e^{2\alpha T}}=\frac{1-e^{\alpha T}\cos(\omega T)z^{-1}}{1-2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z^{-1}+e^{2\alpha T}z^{-2}}$
$\{e^{\alpha kT}\sin(\omega kT)\}$	$\frac{e^{\alpha T}\sin(\omega T)z}{z^2-2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z+e^{2\alpha T}}=\frac{e^{\alpha T}\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z^{-1}+e^{2\alpha T}z^{-2}}$

Oppgave 2.3.

Eksempel 2.7: Finn Z-transformene til de tallfølgene som framkommer når signalene nedenfor samples 5 ganger pr sekund:

a) $f(t)=e^{-2t}$.

b) $f(t)=t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$

c) $f(t)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi t\right)+3\cos\left(\frac{5}{4}\pi t\right)$

Løsning: Når signalene samples 5 ganger pr sekund, er $T = \frac{1}{5}$. Tallfølgene og Z-transformene blir da:

a) $\{x_k\} = \{f(kT)\} = \{e^{-2kT}\}$.

$$Z\{e^{-2kT}\} = \frac{z}{z-e^{-2T}} = \underline{\underline{\frac{z}{z-e^{-\frac{2}{5}}}}}.$$

b) $\{x_k\} = \{f(kT)\} = \left\{kT\cdot e^{-\frac{1}{2}kT}\right\}$.

$$Z\left\{kT\cdot e^{-\frac{1}{2}kT}\right\} = \frac{Te^{-\frac{1}{2}T}z}{\left(z-e^{-\frac{1}{2}T}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{10}}z}{\left(z-e^{-\frac{1}{10}}\right)^2}}}.$$

c) $\{x_k\} = \left\{\sin\left(\frac{5}{4}\pi kT\right) + 3\cos\left(\frac{5}{4}\pi kT\right)\right\} = \left\{\sin\left(\frac{5}{4}\pi kT\right)\right\} + 3\left\{\cos\left(\frac{5}{4}\pi kT\right)\right\}$.

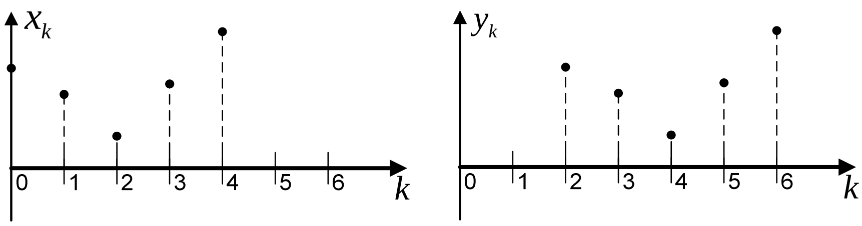
$$Z\left\{\sin\left(\tfrac{5}{4}\pi kT\right) + 3\cos\left(\tfrac{5}{4}\pi kT\right)\right\} = \frac{\sin\left(\frac{5}{4}\pi\cdot\frac{1}{5}\right)z}{z^2-2\cos\left(\frac{5}{4}\pi\cdot\frac{1}{5}\right)z+1} + 3\frac{z^2-\cos\left(\frac{5}{4}\pi\cdot\frac{1}{5}\right)z}{z^2-2\cos\left(\frac{5}{4}\pi\cdot\frac{1}{5}\right)z+1}$$

$$= \frac{3z^2+\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)-3\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)z}{z^2-2\left(\frac{1}{4}\pi\right)z+1}$$

$$= \frac{3z^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)z}{z^2-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}z+1} = \underline{\underline{\frac{3z^2-\sqrt{2}z}{z^2-\sqrt{2}z+1}}}$$

Oppgave 2.4.

2.5. Forskyvning av tallfølger.



Figuren over viser to tallfølger $\{x_k\}$ og $\{y_k\}$, der $\{y_k\}$ er framkommet ved at $\{x_k\}$ er forskjøvet to plasser mot høyre. Mer presist har vi at:

$$y_k = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad k = 0,1 \\ x_{k-2} & \text{når} \quad k = 2,3,4,\cdots \end{cases}$$

Vi skal nå finne sammenhengen mellom Z-transformene til to slike tallfølger $\{x_k\}$ og $\{y_k\}$, der $\{y_k\}$ framkommer ved å forskyve $\{x_k\}$ n plasser mot høyre. Da får vi:

En tallfølge $\{x_k\}$ har Z-transformen $X(z)$.

En tallfølge $\{y_k\}$ er gitt ved

$$y_k = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad k = 0,1,\cdots,n-1 \\ x_{k-n} & \text{når} \quad k = n,n+1,n+2,\cdots \end{cases}$$

Da er

$$Z\{y_k\} = z^{-n}X(z).$$

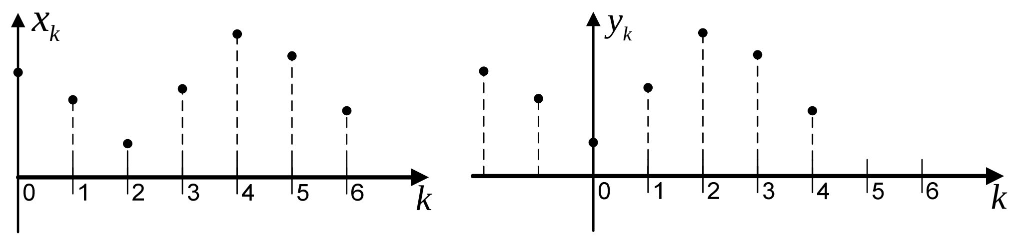
Bevis: Siden $y_k = 0$ når $k < n$, blir

$$Z\{y_k\} = 0 + y_n z^{-n} + y_{n+1}z^{-(n+1)} + y_{n+2}z^{-(n+2)} + \cdots = z^{-n}\left(y_n + y_{n+1}z^{-1} + y_{n+2}z^{-2} + \cdots\right)$$
$$= z^{-n}\left(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots\right) = \underline{\underline{z^{-n}X(z)}}$$

Setningen over kan (litt upresist) formuleres som en ”tommelfingerregel”: *Å multiplisere en Z-transform med* z^{-1} *er det samme som å forskyve tallfølgen en posisjon mot høyre.*

Figuren nedenfor viser den motsatte situasjonen: Tallfølgen $\{y_k\}$ er framkommet ved at $\{x_k\}$ er forskjøvet to plasser mot *venstre*. Mer presist har vi at:

$$y_k = x_{k+2},\ k = 0,1,2,\cdots$$



Også her vil vi finne sammenhengen mellom Z-transformene til de to tallfølgene, men vi skal forskyve $\{x_k\}$ n plasser mot venstre. Da får vi:

En tallfølge $\{x_k\}$ har Z-transformen $X(z)$.

En tallfølge $\{y_k\}$ er gitt ved

$$y_k = x_{k+n} \text{ når } k = 0,1,2,\cdots$$

Da er

$$Z\{y_k\} = z^n\left(X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k}\right).$$

Bevis:

$$Z\{y_k\} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \cdots + y_k z^{-k} + \cdots = x_n + x_{n+1}z^{-1} + x_{n+2}z^{-2} + \cdots + x_{n+k}z^{-k} + \cdots$$

Dette multipliseres med z^{-n}. Da får vi:

$$z^{-n}\cdot Z\{y_k\}=x_n z^{-n}+x_{n+1}z^{-(n+1)}+x_{n+2}z^{-(n+2)}+\cdots+x_{n+k}z^{-(n+k)}+\cdots$$

Nå legger vi til $x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+\cdots+x_{n-1}z^{-(n-1)}$ på begge sider. Da blir høyresiden lik Z-transformen til $\{x_k\}$, slik at

$$z^{-n}\cdot Z\{y_k\}+\left(x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+\cdots+x_{n-1}z^{-(n-1)}\right)=X(z)$$

$$z^{-n}\cdot Z\{y_k\}=X(z)-\left(x_0+x_1z^{-1}+x_2z^{-2}+\cdots+x_{n-1}z^{-(n-1)}\right)$$

$$Z\{y_k\}=z^n\left(X(z)-\sum_{k=0}^{n-1}x_kz^{-k}\right)$$

Og det var nettopp dette vi skulle vise.

Også denne setningen kan (litt upresist) formuleres som en "tommelfingerregel": *Å multiplisere en Z-transform med z er det samme som å forskyve tallfølgen en posisjon mot venstre.*

Eksempel 2.8: Finn Z-transformen til en tallfølge $\{y_k\}$ når:

a) $y_k=\begin{cases}0 & \text{når} \quad k=0,1,2\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-3} & \text{når} \quad k=3,4,5,\cdots\end{cases}$

b) $y_k=k+2$, $k=0,1,2,\cdots$

Løsning:

a) Benytter at

$$Z\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{2}{2-z^{-1}}.$$

Da blir

$$Z\{y_k\}=z^{-3}\cdot Z\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}=\underline{\underline{\frac{2z^{-3}}{2-z^{-1}}}}.$$

Kontroll: Dersom vi benytter definisjonen på Z-transform direkte, får vi at

$$Z\{y_k\}=0+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0z^{-3}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1z^{-4}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2z^{-5}+\cdots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-3}z^{-k}+\cdots$$

$$=z^{-3}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^0+\left(\tfrac{1}{2}\right)^1z^{-1}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2z^{-3}+\cdots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^kz^{-k}+\cdots\right)$$

$$=z^{-3}\cdot Z\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}=\underline{\underline{\frac{2z^{-3}}{2-z^{-1}}}}$$

b) Benytter at

$$Z\{k\}=\frac{z}{(z-1)^2}.$$

Da blir

$$Z\{k+2\}=z^2\left(Z\{k\}-\sum_{k=0}^{1}x_kz^{-k}\right)=z^2\left(\frac{z}{(z-1)^2}-0z^0-1z^{-1}\right)$$

$$=\frac{z^3}{(z-1)^2}-z=\frac{z^3}{(z-1)^2}-\frac{z\left(z^2-2z+1\right)}{(z-1)^2}=\underline{\underline{\frac{2z^2-z}{(z-1)^2}}}$$

Kontroll: Dersom vi benytter definisjonen på Z-transform direkte, får vi at

$$Z\{k+2\} = 2+3z^{-1}+4z^{-2}+\cdots+(k+2)z^{-k}+\cdots$$
$$= z^2\left(2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\cdots+kz^{-k}+\cdots\right)$$
$$= z^2\left(0+1z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+\cdots+kz^{-k}+\cdots-\left(0+1z^{-1}\right)\right)$$
$$= z^2\cdot\left(Z\{k\}-z^{-1}\right) = z^2\left(\frac{z}{(z-1)^2}-1z^{-1}\right) = \text{osv...}$$

Den videre regningen blir som ovenfor.

Setningen om forskyvning mot høyre kan brukes til å lage z-transformer for mange spesielle tallfølger, slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 2.9:

a) Finn Z-transformen til tallfølgen $\{x_k\}$ gitt ved

$$x_k = \begin{cases} 5-k & \text{når} \quad k=0,1,\cdots,5 \\ 0 & \text{når} \quad k=6,7,8,\cdots \end{cases}$$

b) En periodisk funksjon er gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{når} \quad 0\le t<2 \\ 4-t & \text{når} \quad 2\le t<4 \end{cases}, \qquad f(t+4)=f(t).$$

Finn Z-transformen til den tallfølgen som framkommer når denne funksjonen samples med $T=1$, første gang når $t=0$.

Løsning:

a) For å skaffe oss oversikt, skriver vi ut noen av de første leddene i tallfølgen:

$$\{x_k\} = \{5,4,3,2,1,0,0,0,0,\cdots\}.$$

Denne tallfølgen kan framkomme ved at vi starter med tallfølgen $\{5-k\}$, og legger til tallfølgen $\{k\}$ forskjøvet 5 posisjoner mot høyre (utover i tallfølgen). Mer presist:

$$x_k = 5-k+\begin{cases} 0 & \text{når} \quad k=0,1,\cdots,4 \\ k-5 & \text{når} \quad k=5,6,7,\cdots \end{cases}$$

Nå Z-transformerer vi ledd for ledd:

$$Z\{5-k\} = 5\cdot\frac{z}{z-1}-\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{5z(z-1)-z}{(z-1)^2} = \underline{\frac{5z^2-6z}{(z-1)^2}}.$$

Dermed blir

$$X(z) = \frac{5z^2-6z}{(z-1)^2}+z^{-5}\cdot Z\{k\} = \frac{5z^2-6z}{(z-1)^2}+z^{-5}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}$$
$$= \frac{5z^2-6z}{(z-1)^2}+\frac{1}{z^4(z-1)^2} = \underline{\underline{\frac{5z^6-6z^5+1}{z^4(z-1)^2}}}$$

Med litt fantasi kan vi beregne denne Z-transformen direkte ut fra definisjonen. Vi får

$$X(z) = 5+4z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}.$$

For å vise at dette uttrykket er identisk med løsningen foran, tar vi utgangspunkt i at

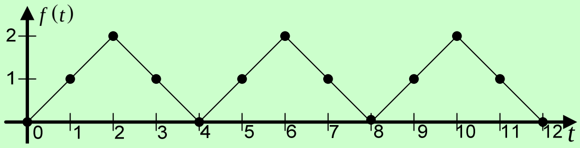
$$z+z^2+z^3+z^4+z^5 = \frac{z(z^5-1)}{z-1} = \frac{z^6-z}{z-1}$$

der jeg har brukt formelen for summen av en endelig geometrisk rekke. Derivasjon gir nå

$$1+2z+3z^2+4z^3+5z^4=\frac{(6z^5-1)(z-1)-(z^6-z)\cdot 1}{(z-1)^2}$$
$$=\frac{6z^6-6z^5-z+1-z^6+z}{(z-1)^2}=\underline{\frac{5z^6-6z^5+1}{(z-1)^2}}$$

Nå gjenstår det bare å dele på z^4, og vi er i mål.

b) Figuren nedenfor viser et utsnitt av $f(t)$, med samplingene inntegnet:



Z-transformen til de 4 første samplingene blir

$$0+1\cdot z^{-1}+2\cdot z^{-2}+1\cdot z^{-3}=z^{-1}(1+2z^{-1}+z^{-2})=\underline{z^{-1}(1+z^{-1})^2}.$$

De neste 4 samplingene er identisk med de 4 første, men de er forskjøvet 4 plasser mot høyre. Z-transformen til disse 4 samplingene blir derfor

$$z^{-4}\cdot z^{-1}(1+z^{-1})^2=z^{-5}\cdot(1+z^{-1})^2.$$

Og slik fortsetter det, med at hver periode forskyves med 4 samplinger. Z-transformen til hele tallfølgen blir derfor

$$X(z)=z^{-1}(1+z^{-1})^2+z^{-5}(1+z^{-1})^2+z^{-9}(1+z^{-1})^2+\cdots$$
$$=(1+z^{-1})^2(z^{-1}+z^{-5}+z^{-9}+\cdots)=\underline{\underline{(1+z^{-1})^2\cdot\frac{z^{-1}}{1-z^{-4}}}}$$
$$=\frac{(1+z^{-1})^2z^{-1}}{(1-z^{-2})(1+z^{-2})}=\frac{(1+z^{-1})^2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})(1+z^{-2})}=\underline{\underline{\frac{(1+z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+z^{-2})}}}$$

Oppgave 2.5.

Oppgave 2.6.

Disse to forskyvnings-setningene danner grunnlaget for å bruke Z-transform til å løse differenslikninger. Men først må vi se på ***invers Z-transform*****.**