3. Invers Z-transform.

Vi skal nå gi oss i kast med følgende problem: Gitt en Z-transform $X(z)$. Finn den tallfølgen $\{x_k\}$ som har Z-transformen $X(z)$. Vi sier at vi skal finne den ***inverse Z-transformen*** til $X(z)$. Mer formelt:

Dersom $X(z)$ er Z-transformen til en tallfølge $\{x_k\}$, så er

$$\{x_k\} = Z^{-1}(X(z))$$

den ***inverse Z-transformen*** til $X(z)$.

Dette problemet kan løses på flere måter. Vi skal nøye oss med disse metodene:

1. Bruk av tabell.
2. Bruk av delbrøkoppspalting og tabell.
3. Bruk av polynomdivisjon.

3.1. Bruk av tabell.

Nå bør du ha tabellen over Z-tranformer foran deg.

Eksempel 3.1: Finn invers Z-transform til disse Z-transformene:

a) $X(z) = \dfrac{6z}{3z-1}$

b) $X(z) = \dfrac{2z}{(z-1)^2}$

c) $X(z) = \dfrac{4z}{(2z-1)^2}$

Løsning:

a) Her er det nærliggende å benytte at

$$Z\{a^k\} = \frac{z}{z-a}.$$

Vi omformer $X(z)$:

$$X(z) = \frac{6z}{3z-1}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2z}{z-\frac{1}{3}} = 2\cdot Z\left\{\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right\} = Z\left\{2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right\}.$$

Altså er

$$Z^{-1}\left(\frac{6z}{3z-1}\right) = \underline{\underline{\left\{2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right\}}}.$$

b) Her er det nærliggende å benytte at

$$Z\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Vi ser da direkte at

$$Z^{-1}\left(\frac{2z}{(z-1)^2}\right)=2\{k\}=\underline{\underline{\{2k\}}}.$$

c) Her er det nærliggende å benytte at

$$Z\{k\cdot a^k\}=\frac{az}{(z-a)^2}.$$

Vi omformer $X(z)$:

$$X(z)=\frac{4z}{(2z-1)^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\frac{1}{2}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=2\cdot Z\left\{k\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}=Z\left\{2k\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}=Z\left\{k\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$$

Altså er

$$Z^{-1}\left(\frac{4z}{(2z-1)^2}\right)=\underline{\underline{\left\{k\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}}}.$$

Oppgave 3.1.

Vi skal snart se at når Laplace-transformen har andregradsuttrykk i z i nevneren, prøver vi å faktorisere nevneren for deretter å delbrøkoppspalte. Men noen ganger er det ikke mulig å faktorisere slike andregradsuttrykk i reelle førstegradsfaktorer. Da står vi ovenfor Laplace-transformen til en samplet sinus- eller cosinus-funksjon, eventuelt kombinert med en eksponentialfaktor.

Eksempel 3.2: Finn invers Z-transform til:

a) $X(z)=\dfrac{z}{z^2-z+1}$

b) $X(z)=\dfrac{-z}{z^2+2z+4}$

c) $X(z)=\dfrac{2z^2+3z}{z^2+2z+2}$

Løsning: I alle eksemplene kontrollerer vi først at nevneren ikke lar seg faktorisere i reelle førstegradsfaktorer. Denne kontrollen er ikke vist i løsningene.

a) Her er det nærliggende å benytte at

$$Z\{\sin(kT\omega)\}=\frac{\sin(\omega T)z}{z^2-2\cos(\omega T)z+1}.$$

Når vi sammenlikner nevnerne, ser vi at vi må kreve at

$$-2\cos(\omega T)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\omega T)=\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \omega T=\pm\tfrac{1}{3}\pi.$$

Vi begrenser oss til vinkler i området $[0,\pi\rangle$, slik at vi bruker $\omega T=\frac{1}{3}\pi$. Da blir

$$\sin(\omega T)=\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$X(z)$ omformes da slik:

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1} = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{z \cdot \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)}{z^2 - 2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)z + 1}.$$

Da ser vi at

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z^2 - z + 1}\right) = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left\{\sin\left(k\cdot\tfrac{1}{3}\pi\right)\right\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(k\cdot\tfrac{1}{3}\pi\right)\right\}}}.$$

b) Her er det nærliggende å benytte at

$$Z\left\{e^{\alpha kT}\sin(kT\omega)\right\} = \frac{e^{\alpha T}\sin(\omega T)z}{z^2 - 2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z + e^{2\alpha T}}.$$

Når vi sammenlikner nevnerne, ser vi først at vi må kreve at

$$e^{2\alpha T} = 4 \quad\Leftrightarrow\quad \left(e^{\alpha T}\right)^2 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\alpha T} = \pm 2.$$

Siden $e^{\alpha kT}$ blir amplituden i svingningen, er det naturlig å benytte $e^{\alpha T} = 2$. Da blir koeffisienten til z:

$$-2e^{\alpha T}\cos(\omega T) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad -2\cdot 2\cos(\omega T) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\omega T) = -\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \omega T = \tfrac{2}{3}\pi$$

når vi begrenser oss til området $[0,\pi\rangle$. Så ser vi på telleren. Da blir

$$e^{\alpha T}\sin(\omega T) = 2\cdot\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

slik at vi omformer $X(z)$ til:

$$X(z) = \frac{-z}{z^2 + 2z + 4} = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)z}{z^2 - 2\cdot 2\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)z + 2^2}.$$

Da ser vi at

$$Z^{-1}\left(\frac{-z}{z^2 + 2z + 4}\right) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left\{2^k\sin\left(k\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)\right\} = \underline{\underline{\left\{-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2^k\sin\left(k\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)\right\}}}.$$

c) Dette kan være Z-transformen til $\left\{e^{\alpha kT}\sin(\omega kT)\right\}$ og / eller $\left\{e^{\alpha kT}\cos(\omega kT)\right\}$. Begge disse Z-transformene har samme nevner. Vi starter derfor med nevneren, og ser at

$$e^{2\alpha T} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(e^{\alpha T}\right)^2 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\alpha T} = \sqrt{2}$$

der vi begrenser oss til den positive verdien. Videre blir

$$-2e^{\alpha T}\cos(\omega T) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad -2\cdot\sqrt{2}\cos(\omega T) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\omega T) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \omega T = \tfrac{3}{4}\pi$$

Da får vi at

$$Z\left\{e^{\alpha kT}\cos(\omega kT)\right\} = \frac{z^2 - e^{\alpha T}\cos(\omega T)z}{z^2 - 2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z + e^{2\alpha T}}$$

$$= \frac{z^2 - \sqrt{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)z}{z^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)z + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{z^2 + z}{z^2 + 2z + 2}$$

$$Z\left\{e^{\alpha kT}\sin(\omega kT)\right\} = \frac{e^{\alpha T}\sin(\omega T)z}{z^2 - 2e^{\alpha T}\cos(\omega T)z + e^{2\alpha T}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot z}{z^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)z + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$$

Nå omformer vi $X(z)$ slik:

$$X(z) = \frac{2z^2+3z}{z^2+2z+2} = A\cdot Z\left\{e^{\alpha kT}\cos(\omega kT)\right\} + B\cdot Z\left\{e^{\alpha kT}\sin(\omega kT)\right\}$$

$$= \frac{A\cdot(z^2+z)}{z^2+2z+2} + \frac{B\cdot z}{z^2+2z+2} = \frac{Az^2+(A+B)z}{z^2+2z+2},$$

Sammenlikning av koeffisienter i teller gir nå at

$A = 2$,

$A + B = 3 \quad \Leftrightarrow \quad B = 3 - A = 3 - 2 = 1$.

Dermed blir

$$Z^{-1}\left(\frac{2z^2+3z}{z^2+2z+2}\right) = 2\cdot Z\left\{e^{\alpha kT}\cos(\omega kT)\right\} + 1\cdot Z\left\{e^{\alpha kT}\sin(\omega kT)\right\}$$

$$= 2\left\{\sqrt{2}^k\cos\left(k\cdot\tfrac{3}{4}\pi\right)\right\} + \left\{\sqrt{2}^k\sin\left(k\cdot\tfrac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$= \underline{\underline{\left\{\sqrt{2}^k\left(2\cos\left(k\cdot\tfrac{3}{4}\pi\right)+\sin\left(k\cdot\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)\right\}}}$$

Oppgave 3.2.

Noen ganger må vi benytte en av forskyvnings-setningene i tillegg til tabellen, slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 3.3: Finn invers Z-transform til:

a) $X(z) = \dfrac{1}{z^2 - z}$.

b) $X(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

Løsning:

a) Her benytter vi at $Z\{1\} = \dfrac{z}{z-1}$. Da omformer vi $X(z)$ slik:

$$X(z) = \frac{1}{z^2-z} = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{z^{-1}}{z-1} = z^{-2}\cdot\frac{z}{z-1} = z^{-2}\cdot Z\{1\}.$$

Dermed har vi at

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{z^2-z}\right) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad k = 0,1 \\ 1 & \text{når} \quad k = 2,3,4,\cdots \end{cases}$$

b) Her benytter vi at $Z\left\{k\cdot a^k\right\} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$. Vi setter $a = -1$, slik at

$$Z\left\{(-1)^k\cdot k\right\} = \frac{-z}{(z+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{(z+1)^2} = -Z\left\{(-1)^k\cdot k\right\} = Z\left\{(-1)^{k+1}\cdot k\right\}.$$

Da blir

$$Z^{-1}\left(\frac{z^2}{(z+1)^2}\right) = Z^{-1}\left(z\cdot\frac{z}{(z+1)^2}\right) = \left\{(-1)^{(k+1)+1}(k+1) - 0\right\} = \underline{\underline{\left\{(-1)^k(k+1)\right\}}}.$$

Oppgave 3.3.

3.2. Delbrøkoppspalting og tabell.

I Eksempel 3.2 invers-transformerte vi noen Z-transformer der nevneren ikke lot seg faktorisere i reelle førstegradsfaktorer. Dersom nevneren lar seg faktorisere i reelle førstegradsfaktorer, skal vi delbrøkoppspalte slik at vi får brøker av formen

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} = Z\left\{a^k\right\}.$$

Teknikken er vist i eksemplene nedenfor. Merk at dersom vi bruker den første formen, må delbrøkene ha z i teller, ikke bare en konstant slik vi er vant med fra før.

Eksempel 3.4: Finn invers Z-transform til:

a) $X(z) = \dfrac{z}{2z^2-3z+1}$.

b) $X(z) = \dfrac{z^2+z}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}}$.

c) $X(z) = \dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}}$.

Løsning:

a) Vi starter med å faktorisere nevneren:

$$2z^2-3z+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} = \frac{3\pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Da er

$$2z^2-3z+1 = 2(z-1)\left(z-\tfrac{1}{2}\right) = (z-1)(2z-1).$$

Vi skal nå finne to tall A og B slik at

$$\frac{z}{2z^2-3z+1} = \frac{z}{(z-1)(2z-1)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{2z-1} = \frac{Az(2z-1)+Bz(z-1)}{(z-1)(2z-1)}$$
$$= \frac{(2A+B)z^2+(-A-B)z}{2z^2-3z+1}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$2A+B=0$$
$$-A-B=1$$

Legger sammen likningene, og får $A=1$, som deretter gir $B=-2A=-2$. Da her vi at

$$X(z) = \frac{z}{2z^2-3z+1} = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{2z-1} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}}.$$

Invers-transformering gir nå

$$\{x_k\} = \{1\} - \left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\} = \underline{\underline{\left\{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}}}.$$

b) Faktoriserer nevneren:

$$z^2 - \tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}}}{2} = \frac{\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{3}{4}}{2} = \begin{cases} \tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{4} \end{cases}$$

slik at

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - \tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{8}} = \frac{z^2 + z}{\left(z - \tfrac{1}{2}\right)\left(z + \tfrac{1}{4}\right)} = \frac{Az}{z - \tfrac{1}{2}} + \frac{Bz}{z + \tfrac{1}{4}}$$

$$= \frac{Az\left(z + \tfrac{1}{4}\right) + Bz\left(z - \tfrac{1}{2}\right)}{\left(z - \tfrac{1}{2}\right)\left(z + \tfrac{1}{4}\right)} = \frac{(A+B)z^2 + \left(\tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{2}B\right)z}{\left(z - \tfrac{1}{2}\right)\left(z + \tfrac{1}{4}\right)}$$

Sammenlikner koeffisienter:

$$A + B = 1$$

$$\tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{2}B = 1$$

Multipliserer nederste likning med 2 og legger sammen:

$$\tfrac{3}{2}A = 3 \quad \Leftrightarrow \quad A = 2\,.$$

Da blir

$$B = 1 - A = 1 - 2 = -1$$

slik at

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - \tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{8}} = 2\frac{z}{z - \tfrac{1}{2}} - \frac{z}{z + \tfrac{1}{4}}\,.$$

$$Z^{-1}(X) = 2 \cdot \left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\} - \left\{\left(-\tfrac{1}{4}\right)^k\right\} = \underline{\underline{\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(-\tfrac{1}{4}\right)^k\right\}}}\,.$$

c) Ser at

$$1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} = \left(1 - z^{-1}\right) + z^{-2}\left(1 - z^{-1}\right) = \left(1 + z^{-2}\right)\left(1 - z^{-1}\right).$$

Da blir

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-2}\right)}\,.$$

For å delbrøkoppspalte til brøker som fins i tabellen, prøver vi

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-2}\right)} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B + Cz^{-1}}{1 + z^{-2}} = \frac{A\left(1 + z^{-2}\right) + \left(B + Cz^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-2}\right)}$$

$$= \frac{A + Az^{-2} + B - Bz^{-1} + Cz^{-1} - Cz^{-2}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-2}\right)} = \frac{(A - C)z^{-2} + (-B + C)z^{-1} + (A + B)}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-2}\right)}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A - C = 0$$

$$-B + C = 1$$

$$A + B = 1$$

Legger sammen alle likningene, og får

$$2A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1\,.$$

Deretter nøster vi opp:

$$A - C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = A = 1\,,$$

$$A + B = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = 1 - A = 1 - 1 = 0\,.$$

Dermed har vi delbrøkoppspaltingen

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-2}\right)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 + z^{-2}}\,.$$

For å invers-transformere den siste brøken, benytter vi at

$$Z\{\sin(\omega kT)\} = \frac{\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}.$$

Her må vi sette

$$\cos(\omega T)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega T = \tfrac{1}{2}\pi \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\omega T)=\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=1.$$

Dermed får vi at

$$Z^{-1}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}}\right) = Z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)+Z^{-1}\left(\frac{z^{-1}}{1+z^{-2}}\right) = \{1\}+\left\{\sin\left(k\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \underline{\underline{\left\{1+\sin\left(k\cdot\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}}}$$

Oppgave 3.4.

3.3. Polynomdivisjon.

Dersom vi kun er interessert i de første verdiene i den tallfølgen som vi kjenner Z-transformen til, kan vi finne disse verdiene slik det er vist i eksemplet nedenfor.

Eksempel 3.5: Finn de første leddene i den tallfølgen som har disse Z-transformene:

a) $X(z)=\dfrac{6z}{3z-1}$ (Se Eks. 3.1a).

b) $X(z)=\dfrac{z}{z^2-z+1}$ (Se Eks. 3.2a).

Løsning: Vi starter alltid med å uttrykke Z-transformen ved z^{-1}.

a) $$X(z)=\frac{6z}{3z-1}=\frac{6}{3-z^{-1}}.$$

Så utfører vi delbrøkoppspaltingen

$$(6+0z^{-1}+0z^{-2}+0z^{-3}+\cdots):(3-z^{-1}) = 2+\tfrac{2}{3}z^{-1}+\tfrac{2}{9}z^{-2}+\tfrac{2}{27}z^{-3}+\cdots$$

$$\begin{array}{l}
-\underline{(6-2z^{-1})} \\
\qquad 2z^{-1} \\
\quad -\underline{\left(2z^{-1}-\tfrac{2}{3}z^{-2}\right)} \\
\qquad\qquad \tfrac{2}{3}z^{-2} \\
\qquad\quad -\underline{\left(\tfrac{2}{3}z^{-2}-\tfrac{2}{9}z^{-3}\right)} \\
\qquad\qquad\qquad \tfrac{2}{9}z^{-3}-\cdots
\end{array}$$

Dette stemmer med resultatet fra Eksempel 3.1a):

$$\{x_k\}=\left\{2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right\}=\left\{2,\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3^2},\tfrac{2}{3^3},\cdots\right\}.$$

b) $$X(z)=\frac{z}{z^2-z+1}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}.$$

Så utfører vi delbrøkoppspaltingen

$$\begin{array}{l}
\left(z^{-1}+0z^{-2}+0z^{-3}+0z^{-4}+0z^{-5}+\cdots\right):\left(1-z^{-1}+z^{-2}\right)=z^{-1}+z^{-2}-z^{-4}-z^{-5}+z^{-7}+\cdots \\
\underline{-\left(z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}\right)} \\
\quad z^{-2}-z^{-3} \\
\quad \underline{-\left(z^{-2}-z^{-3}+z^{-4}\right)} \\
\qquad -z^{-4} \\
\qquad \underline{-\left(-z^{-4}+z^{-5}-z^{-6}\right)} \\
\qquad\quad -z^{-5}+z^{-6} \\
\qquad\quad \underline{-\left(-z^{-5}+z^{-6}-z^{-7}\right)} \\
\qquad\qquad z^{-7}
\end{array}$$

Dette stemmer med resultatet fra Eksempel 3.2a):

$$\begin{aligned}
\{x_k\} &= \left\{\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(k\cdot\tfrac{1}{3}\pi\right)\right\} \\
&= \left\{\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin 0,\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right),\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right),\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\pi,\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right),\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right),\cdots\right\} \\
&= \left\{0,\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ 0,\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ 0,\cdots\right\} \\
&= \{0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1\ ,-1,\ 0,\ 1,\cdots\}
\end{aligned}$$

Oppgave 3.5.

3.4. Start- og sluttverdi-setningene.

Når vi jobber med fysiske målinger, er det ofte nyttig å kunne danne seg et grovt bilde av hvordan signalene oppfører seg bare ved å se på Z-transformene til signalene. Her er det startverdi- og sluttverdi-setningene kommer inn i bildet:

Dersom en tallfølge $\{x_k\}$ har Z-transform $X(z)$, så er:

Startverdisetningen: $x_0 = \lim_{z\to\infty} X(z)$.

Sluttverdisetningen: Dersom x_k går mot en fast verdi når $k\to\infty$, så er
$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{z\to 1}\left(\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right)$.

Bevis: Vi husker at

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots + x_k z^{-k} + \cdots.$$

Vi ser direkte at når $z\to\infty$ vil $z^{-1}\to 0$, slik at $\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0$.

Beviset for sluttverdisetningen er litt mer plundrete. Men vi benytter at

$$\begin{aligned}
\left(1-z^{-1}\right)X(z) &= \left(1-z^{-1}\right)\left(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots + x_k z^{-k} + \cdots\right) \\
&= \left(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \cdots + x_k z^{-k} + \cdots\right) - \left(x_0 z^{-1} + x_1 z^{-2} + \cdots + x_k z^{-k-1} + \cdots\right) \\
&= x_0 + \left(x_1 - x_0\right)z^{-1} + \left(x_2 - x_1\right)z^{-2} + \cdots + \left(x_k - x_{k-1}\right)z^{-k} + \cdots
\end{aligned}$$

Vi ser at når $z \to 1$ vil også $z^{-1} \to 1$, slik at

$$\lim_{z\to 1}\left(\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right) = x_0 + \left(x_1 - x_0\right) + \left(x_2 - x_1\right) + \cdots + \left(x_k - x_{k-1}\right) + \cdots.$$

Her vil alle leddene unntatt "det siste" falle bort, slik at

$$\lim_{z\to 1}\left(\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right) = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Merk at vi må forutsette at det virkelig eksisterer en fast verdi for "det siste" leddet. Vi kan heldigvis vise at:

> x_k går mot en fast verdi når $k \to \infty$ hvis og bare hvis alle nullpunktene til nevner-polynomet ligger innenfor enhetssirkelen i det komplekse planet, med unntak av ett mulig nullpunkt for $z = 1$.

Til skrekk og advarsel skal vi se på Z-transformen fra Eksempel 3.2a og 3.5b:

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}.$$

Dersom vi er uforsiktige nok til å bruke sluttverdisetningen her, får vi at

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{z\to 1}\left(\left(1-z^{-1}\right)\frac{z}{z^2-z+1}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z}{z^2-z+1}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^2-z+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Men vi har sett at

$$\left\{x_k\right\} = \left\{0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1\ ,-1,\ 0,\ 1,\cdots\right\},$$

slik at x_k går åpenbart ikke mot noen fast verdi når $k \to \infty$. Dette stemmer med at

$$z^2 - z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \tfrac{1}{2} \pm i\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

som begge ligger *på* enhetssirkelen i det komplekse planet. Dermed kan vi ikke bruke slutt-verdisetningen her. La oss heller se på et eksempel der sluttverdisetningen kan brukes:

Eksempel 2.10: I Eksempel 2.1 fant vi at

$$Z\left\{5\left(1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right)\right\} = X(z) = \frac{\frac{10}{3}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

Finn x_0 og $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ ved hjelp av start- og sluttverdisetningene.

Løsning:

$$x_0 = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z^{-1}\to 0}\frac{\frac{10}{3}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{0}{(1-0)(1-0)} = \underline{\underline{0}}.$$

Siden nullpunktene i nevneren er $z = 1$ og $z = \frac{1}{3}$, kan vi bruke sluttverdisetningen:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{z\to 1}\left(\left(1-z^{-1}\right)\cdot\frac{\frac{10}{3}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{\frac{10}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \lim_{z\to 1}\frac{\frac{10}{3}}{z-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \underline{\underline{5}}.$$

Begge disse resultatene stemmer med at $x_k = 5\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$.

Oppgave 3.6.

Nå kan du bruke Z-transformen til å løse differenslikninger eller se på diskrete systemer.