1. Definisjon av Z-transformen.

Dersom du har brukt Laplace-transformen, vil du vite at den er et svært nyttig hjelpemiddel for eksempel til å løse differensiallikninger. Laplace-transformen er minst like nyttig til å analysere fysiske systemer og til å konstruere regulatorer. Men Laplace-transformen benyttes først og fremst for *kontinuerlige* funksjoner og *kontinuerlige* systemer.

Dersom du har *diskrete* funksjoner (d.v.s. tallfølger) og *diskrete* systemer (for eksempel en datamaskin som registrerer målinger og sender ut signaler ved bestemte tidspunkt), er ikke Laplace-transformen like egnet. Da er *Z-transformen* et bedre hjelpemiddel.

I dette lille notatet skal jeg først definere Z-transformen og se på noen av egenskapene, og deretter bruke den til å løse differenslikninger. Til slutt skal jeg svært overfladisk antyde hvordan Z-transformen kan brukes på diskrete systemer.

Vi går rett løs på definisjonen:

Vi har gitt en tallfølge $\{x_k\}$, $k = 0,1,2,\cdots$.

Da er ***Z-transformen til*** $\{x_k\}$ definert som

$$Z\{x_k\} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot z^{-1} = X(z).$$

I definisjonen ovenfor er z en kompleks variabel. Vi sier gjerne at vi transformerer over til et komplekst *z-plan*. Definisjonen forutsetter at z har slike verdier at rekka konvergerer.

Vi starter med et enkelt eksempel:

Eksempel 1.1: Finn Z-transformen til tallfølgen $\{x_k\}$ gitt ved

$x_0 = 0$, $\quad x_1 = 1$, $\quad x_2 = 2$, $\quad x_3 = 1$, $\quad x_k = 0$ for $k = 4,5,6,\cdots$.

Løsning: Z-transformen blir

$$\begin{aligned} X(z) &= x_0 \cdot z^{-0} + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + x_3 \cdot z^{-3} + x_4 \cdot z^{-4} + \cdots \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} + \cdots \\ &= z^{-1}\left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right) = \underline{\underline{z^{-1}\left(1 + z^{-1}\right)^2}} \end{aligned}$$

Vi tar et par eksempler til. Resultatene i disse eksemplene skal vi bruke senere.

Eksempel 1.2: Finn Z-transformen til tallfølgen $\{x_k\}$ gitt ved

$x_k = 1$ for alle $k = 0,1,2,\cdots$.

Løsning: Z-transformen blir

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots+z^{-k}+\cdots=\underline{\underline{\frac{1}{1-z^{-1}}}}=\underline{\underline{\frac{z}{z-1}}}.$$

Her har jeg brukt formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke. Dette forutsetter at rekka konvergerer, d.v.s. at $|z^{-1}|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|>1$. Merk at svaret gis på to måter, både uttrykt ved z^{-1} og uttrykt ved z. Vi bruker den formen som er gunstigst.

Eksempel 1.3: Finn Z-transformen til tallfølgen $\{x_k\}$ gitt ved

$$x_k=a^k,$$

og bruk resultatet til å sette opp Z-transformen til tallfølgen

$$\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\},\ k=0,1,2,\cdots.$$

Løsning: Z-transformen blir

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cdot z^{-k}=1+a\cdot z^{-1}+a^2\cdot z^{-2}+a^3\cdot z^{-3}+\cdots+a^k\cdot z^{-k}+\cdots$$

$$=1+az^{-1}+\left(az^{-1}\right)^2+\left(az^{-1}\right)^3+\cdots+\left(az^{-1}\right)^k+\cdots=\underline{\underline{\frac{1}{1-az^{-1}}}}=\underline{\underline{\frac{z}{z-a}}}$$

Her har jeg brukt formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke. Dette forutsetter at rekka konvergerer, d.v.s. at $|az^{-1}|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|>|a|$.

Når $a=\frac{1}{2}$, blir Z-transformen til $\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\},\ k=0,1,2,\cdots$

$$X(z)=\underline{\underline{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}}=\underline{\underline{\frac{2}{2-z^{-1}}}}=\underline{\underline{\frac{2z}{2z-1}}}.$$

I eksemplene over tok vi også med betingelsen for at Z-transformen skal eksistere. Vi får etter hvert bruk for Z-transformen til mange andre tallfølger. Da skal vi rett og slett forutsette at Z-transformene eksisterer, og vi vil ikke undersøke betingelsene for eksistens.

Oppgave 1.1.

Vi avrunder denne innledningen med å ramme inn resultatene fra de to siste eksemplene:

$$Z\{1\}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

$$Z\{a^k\}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

Nå er det på tide å gyve løs på noen egenskaper ved Z-transformen, og benytte disse til å beregne Z-transformene til mange andre tallfølger.