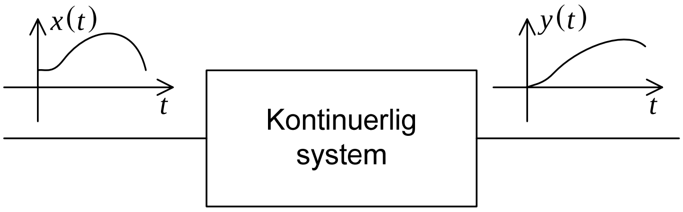
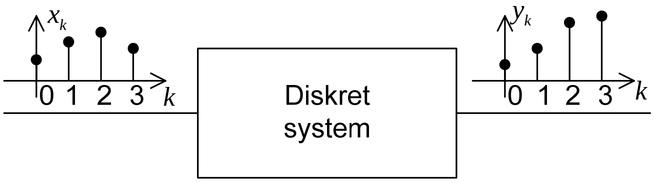
5. Diskrete systemer.

Et k*ontinuerlig system* gir ut et *kontinuerlig* signal $y(t)$ når det får et *kontinuerlig* innsignal $x(t)$ slik figuren nedenfor viser:



Et *diskret system* gir ut en *tallfølge* $\{y_k\}$ når innsignalet er en annen tallfølge $\{x_k\}$. Elementene i slike tallføler kalles gjerne *pulser*, og hele tallfølgen blir et *pulstog* slik figuren nedenfor viser:



Det er rimelig å anta at puls nr *k* i utsignalet, y_k, er entydig bestemt når vi kjenner x_k og *n* foregående inn-pulser x_{k-1}, x_{k-2}, …, x_{k-n}, samt *m* foregående pulser y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-m} i utsignalet.

Vi sier at systemet er *lineært* dersom y_k er gitt ved en *lineær* sammenheng mellom disse størrelsene slik at

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \cdots + b_n x_{k-n} - \left(a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots + a_m y_{k-m}\right).$$

Dette uttrykket kan omformes til

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \cdots + a_m y_{k-m} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \cdots + b_n x_{k-n}.$$

Denne likningen Z-transformeres. Da benytter vi at

$$Z\{x_{k-n}\} = z^{-n} \cdot X(z), \qquad Z\{y_{k-m}\} = z^{-m} \cdot Y(z).$$

Dessuten skriver vi bare *X* og *Y* istedenfor $X(z)$ og $Y(z)$. Da får vi

$$Y + a_1 z^{-1} Y + a_2 z^{-2} Y + \cdots + a_m z^{-m} Y = b_0 X + b_1 z^{-1} X + b_2 z^{-2} X + \cdots + b_n z^{-n} X$$

$$\left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}\right) Y = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}\right) X$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_m z^{-m}}$$

Størrelsen $G(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ kaller vi *pulstransferfunksjonen* til det diskrete systemet.

Hvis vi kjenner pulstransferfunksjonen $G(z)$ for et diskret system, kan vi finne utsignalet $\{y_k\}$ for ethvert innsignal $\{x_k\}$ ved å benytte at

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z)$$

slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 5.1: Et diskret system er gitt ved

$$y_k = x_{k-1} + \tfrac{1}{2} y_{k-1}.$$

a) Bestem systemets pulstransferfunksjon.

b) Finn $\{y_k\}$ når:

1) $x_k = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad k = 0 \\ 0 & \text{når} \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$

2) $x_k = 1$ for alle $k = 0, 1, \cdots$.

Løsning:

a) Omformer den gitte sammenhengen til

$$y_k - \tfrac{1}{2} y_{k-1} = x_{k-1}.$$

Z-transformerer:

$$Y(z) - \tfrac{1}{2} z^{-1} Y(z) = z^{-1} X(z)$$

$$\left(1 - \tfrac{1}{2} z^{-1}\right) Y(z) = z^{-1} X(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underline{\underline{\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}}}$$

b1) $x_k = \begin{cases} 1 & \text{når} \quad k = 0 \\ 0 & \text{når} \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X(z) = 1.$

Da blir

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \cdot 1 = z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}.$$

Vi vet at

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}\right) = \left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}, \; k = 0, 1, \cdots.$$

Faktoren z^{-1} medfører at denne tallfølgen må forskyves ett trinn, slik at

$$y_k = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad k = 0 \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^k & \text{når} \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

b2) $x_k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}.$

Da blir

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

$$= \frac{A\left(1 - z^{-1}\right) + B\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{(A + B) + \left(-A - \frac{1}{2} B\right) z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A+B=0$$
$$-A-\tfrac{1}{2}B=1$$

Legger sammen likningene, og får

$$\tfrac{1}{2}B=1 \quad\Leftrightarrow\quad B=\underline{2} \quad\Leftrightarrow\quad A=-B=\underline{-2}\,.$$

Da blir

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1-z^{-1}} \quad\Leftrightarrow\quad \{y_k\}=\underline{\underline{\left\{2-2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}}}\,.$$

Eksempel 5.2: Et diskret system er gitt ved

$$y_k=x_{k-1}-x_{k-2}-3y_{k-1}-2y_{k-2}\,.$$

a) Bestem systemets pulstransferfunksjon.

b) Finn $\{y_k\}$ når:

1) $x_k=1$ for alle $k=0,1,\cdots$.

2) $x_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k$ for alle $k=0,1,\cdots$.

Løsning:

a) Omformer den gitte sammenhengen til

$$y_k+3y_{k-1}+2y_{k-2}=x_{k-1}-x_{k-2}\,.$$

Z-transformerer:

$$Y(z)+3z^{-1}Y(z)+2z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)-z^{-2}X(z)$$
$$\left(1+3z^{-1}+2z^{-2}\right)Y(z)=\left(z^{-1}-z^{-2}\right)X(z)$$
$$G(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\underline{\underline{\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}}}=\underline{\underline{\frac{z^{-1}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}}}$$

b1) $\{x_k\}=\{1\} \quad\Leftrightarrow\quad X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}\,.$

Da blir

$$Y(z)=G(z)\cdot X(z)=\frac{z^{-1}\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}$$
$$=\frac{A}{1+2z^{-1}}+\frac{B}{1+z^{-1}}=\frac{A\left(1+z^{-1}\right)+B\left(1+2z^{-1}\right)}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}=\frac{(A+B)+(A+2B)z^{-1}}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A+B=0$$
$$A+2B=1$$

Trekker likningene fra hverandre, og får

$$B=\underline{1} \quad\Leftrightarrow\quad A=-B=\underline{-1}\,.$$

Da blir

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}=\frac{-1}{1+2z^{-1}}+\frac{1}{1+z^{-1}} \quad\Leftrightarrow\quad \{y_k\}=\underline{\underline{\left\{(-1)^k-(-2)^k\right\}}}\,.$$

b2) $\{x_k\} = \left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\} \quad \Leftrightarrow \quad X(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$.

Da blir

$$Y(z) = G(z)\cdot X(z) = \frac{z^{-1}(1-z^{-1})}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z^{-1}-z^{-2}}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$= \frac{A}{1+2z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}} + \frac{C}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$= \frac{A(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1}) + B(1+2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1}) + C(1+2z^{-1})(1+z^{-1})}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$= \frac{A(1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}) + B(1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}) + C(1+3z^{-1}+2z^{-2})}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$= \frac{(A+B+C) + (\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}B+3C)z^{-1} + (-\frac{1}{2}A-B+2C)z^{-2}}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A+B+C=0$$

$$\tfrac{1}{2}A+\tfrac{3}{2}B+3C=1$$

$$-\tfrac{1}{2}A-B+2C=-1$$

Skifter fortegn på den midterste likningen og legger dem sammen, og får

$$-\tfrac{3}{2}B=-2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{B=\tfrac{4}{3}}.$$

Setter dette inn i de to nederste likningene og legger dem sammen. Får da

$$2-\tfrac{4}{3}+5C=0 \quad \Leftrightarrow \quad C=\underline{-\tfrac{2}{15}}.$$

Til slutt blir

$$A=-B-C=-\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{15}=\underline{-\tfrac{6}{5}}.$$

Dermed har vi at

$$Y(z) = \frac{-\frac{6}{5}}{1+2z^{-1}} + \frac{\frac{4}{3}}{1+z^{-1}} - \frac{\frac{2}{15}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \{y_k\} = \underline{\underline{\left\{-\tfrac{6}{5}(-2)^k+\tfrac{4}{3}-\tfrac{2}{15}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}}}.$$

Oppgave 5.1.