4. Løsing av differenslikninger.

4.1. Introduksjon.

Det er ganske vanlig at du får oppgitt noen av de første leddene i en tallfølge, og deretter en sammenheng mellom etterfølgende ledd. Da er det mulig å regne seg rekursivt fra ledd til ledd i tallfølgen slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 4.1: Sett opp de 4 første leddene i en tallfølge $\{x_k\}$ som er gitt ved

$$x_0 = 1, \qquad x_{k+1} = \tfrac{1}{2}x_k + 1 \text{ når } k = 0,1,2,\cdots.$$

Løsning: Vet at $x_0 = 1$. Da blir

$$x_1 = \tfrac{1}{2}x_0 + 1 = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + 1 = \tfrac{3}{2}.$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}x_1 + 1 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2} + 1 = \tfrac{7}{4}.$$
$$x_3 = \tfrac{1}{2}x_2 + 1 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{7}{4} + 1 = \tfrac{15}{8}.$$

Ved å bruke Z-transform er det ofte mulig å finne en formel for ledd nr. k i en slik tallfølge. Da får vi bruk for setningene om forskyvning av tallfølger fra kap. 2.5. Vi omformer og forenkler disse setningene litt, og skriver dem slik:

En tallfølge $\{x_k\}$ har Z-transformen $X(z)$. Da gjelder:

$$Z\{x_{k-n}\} = z^{-n}X(z).$$
$$Z\{x_{k+1}\} = z\cdot X(z) - z\cdot x_0.$$
$$Z\{x_{k+2}\} = z^2\cdot X(z) - z^2\cdot x_0 - z\cdot x_1.$$
$$Z\{x_{k+3}\} = z^3\cdot X(z) - z^3\cdot x_0 - z^2\cdot x_1 - z\cdot x_2.$$

Ved hjelp av disse setningene kan vi nå Z-transformere differenslikninger.

4.2. Lineære differenslikninger.

La oss vende tilbake til Eksempel 4.1, og finne en formel for x_k:

Eksempel 4.2: Løs differenslikningen

$$x_0 = 1, \qquad x_{k+1} = \tfrac{1}{2}x_k + 1 \text{ når } k = 0,1,2,\cdots.$$

Løsning: Vi Z-transformerer likningen, og husker at $Z\{1\} = \dfrac{z}{z-1}$. Da får vi:

$$z \cdot X(z) - z \cdot \underbrace{x_0}_{=1} = \tfrac{1}{2} X(z) + \frac{z}{z-1}$$

$$\left(z - \tfrac{1}{2}\right) X(z) = z + \frac{z}{z-1} = \frac{z(z-1)+z}{z-1} = \frac{z^2}{z-1}$$

Så løser vi ut $X(z)$, og delbrøkoppspalter:

$$X(z) = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{A\left(1-z^{-1}\right)+B\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{(A+B)+\left(-A-\frac{1}{2}B\right)z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A + B = 1$$
$$-A - \tfrac{1}{2}B = 0$$

Legger sammen likningene, og får

$$\tfrac{1}{2}B = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = 2$$

som videre gir

$$A = -\tfrac{1}{2}B = -\tfrac{1}{2}\cdot 2 = -1.$$

Dermed er

$$X(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

som invers-transformeres med tabell til

$$\{x_k\} = \underline{\underline{\left\{2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}}}.$$

Vi ser lett at de første leddene fra Eksempel 4.1 stemmer med denne formelen.

Eksempel 4.3: Bruk Z-transform til å løse differenslikningene nedenfor:

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_{k+2} = 3x_{k+1} - 2x_k$ når $k = 0,1,2,\cdots$.

b) $x_0 = 6$, $x_1 = 20$, $x_{k+2} = 4x_{k+1} - 4x_k$ når $k = 0,1,2,\cdots$.

c) $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{k+2} = x_{k+1} - x_k$ når $k = 0,1,2,\cdots$.

d) $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, $x_{k+2} = x_{k+1} + 2x_{k+2} + 3\cdot 2^k$ når $k = 0,1,2,\cdots$.

Løsning:

a) $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_{k+2} = 3x_{k+1} - 2x_k$ når $k = 0,1,2,\cdots$.

Z-transformerer differenslikningen, setter inn startverdiene, og delbrøkoppspalter:

$$z^2 \cdot X(z) - z^2 \cdot 0 - z \cdot 2 = 3\left(z \cdot X(z) - z\cdot 0\right) - 2\cdot X(z)$$

$$\left(z^2 - 3z + 2\right) X(z) = 2z$$

$$X(z) = \frac{2z}{z^2-3z+2} = \frac{2z}{(z-2)(z-1)} = \frac{2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} = \frac{A\left(1-z^{-1}\right)+B\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{(A+B)+(-A-2B)z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A + B = 0$$

$$-A-2B=2$$

Legger sammen, og får

$$-B=2 \quad \Leftrightarrow \quad B=-2 \quad \Leftrightarrow \quad A=-B=2.$$

Dermed blir

$$X(z)=\frac{2}{1-2z^{-1}}-\frac{2}{1-z^{-1}}$$

som invers-transformeres ved hjelp av tabell til

$$\{x_k\}=\underline{\underline{\{2\cdot 2^k-2\}}}=\underline{\underline{\{2(2^k-1)\}}}.$$

b) $x_0=6$, $x_1=20$, $x_{k+2}=4x_{k+1}-4x_k$ når $k=0,1,2,\cdots$.

Z-transformerer differenslikningen, setter inn startverdiene, og delbrøkoppspalter. Merk hvordan delbrøkoppspaltingen gjøres for å få brøker som lett kan invers-transformeres med tabell:

$$z^2\cdot X(z)-z^2\cdot 6-z\cdot 20=4\big(z\cdot X(z)-z\cdot 6\big)-4\cdot X(z)$$

$$\big(z^2-4z+4\big)X(z)=6z^2+20z-24z$$

$$X(z)=\frac{6z^2-4z}{z^2-4z+4}=\frac{6z^2-4z}{(z-2)^2}=\frac{6-4z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$$

$$=\frac{A\cdot 2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}+\frac{B}{1-2z^{-1}}=\frac{2Az^{-1}+B(1-2z^{-1})}{(1-2z^{-1})^2}=\frac{B+(2A-2B)z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$B=6$$

$$2A-2B=-4 \quad \Leftrightarrow \quad A=B-2=6-2=4$$

Dermed blir

$$X(z)=4\cdot\frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}+6\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

som invers-transformeres ved hjelp av tabell til

$$\{x_k\}=\underline{\underline{\{4k\cdot 2^k+6\cdot 2^k\}}}=\underline{\underline{\{(2k+3)\cdot 2^{k+1}\}}}.$$

c) $x_0=1$, $x_1=2$, $x_{k+2}=x_{k+1}-x_k$ når $k=0,1,2,\cdots$.

Z-transformerer differenslikningen, og setter inn startverdiene:

$$z^2\cdot X(z)-z^2\cdot 1-z\cdot 2=z\cdot X(z)-z\cdot 1-X(z)$$

$$\big(z^2-z+1\big)X(z)=z^2+2z-z \quad \Leftrightarrow \quad X(z)=\frac{z^2+z}{z^2-z+1}=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

Nevneren lar seg ikke faktorisere i reelle førstegradsfaktorer. Tabellen tyder da på at den må være av formen

$$1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}.$$

Da er

$$-2\cos(\omega T)=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\omega T)=\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega T=\tfrac{1}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega T)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

slik at vi må splitte opp $X(z)$ på denne måten:

$$X(z) = A\cdot\frac{1-\cos(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}} + B\cdot\frac{\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{A\left(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)+B\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}} = \frac{A+\left(-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}B\right)z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir nå

$$A=1$$

$$-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}B=1 \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{3}B=1+\tfrac{1}{2}\cdot 1=\tfrac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad B=\sqrt{3}$$

Dermed blir

$$X(z)=1\cdot\frac{1-\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)z^{-1}}{1-2\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)z^{-1}+z^{-2}}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)z^{-1}}{1-2\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)z^{-1}+z^{-2}}$$

som invers-transformeres til

$$\{x_k\}=\underline{\underline{\left\{\cos\left(k\cdot\tfrac{1}{3}\pi\right)+\sqrt{3}\cdot\sin\left(k\cdot\tfrac{1}{3}\pi\right)\right\}}}.$$

d) $x_0=3$, $x_1=4$, $x_{k+2}=x_{k+1}+2x_{k+2}+3\cdot 2^k$ når $k=0,1,2,\cdots$.

Z-transformerer differenslikningen, setter inn startverdiene, og delbrøkoppspalter. Merk hvordan delbrøkoppspaltingen gjøres for å få brøker som lett kan invers-transformeres med tabell:

$$z^2\cdot X(z)-z^2\cdot 3-z\cdot 4=z\cdot X(z)-z\cdot 3+2\cdot X(z)+3\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\left(z^2-z-2\right)X(z)=3z^2+4z-3z+\frac{3z}{z-2}=\frac{\left(3z^2+z\right)(z-2)+3z}{z-2}=\frac{3z^3-5z^2+z}{z-2}$$

$$X(z)=\frac{3z^3-5z^2+z}{((z-2)(z+1))(z-2)}=\frac{3z^3-5z^2+z}{(z-2)^2(z+1)}=\frac{3-5z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{A\cdot 2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2}+\frac{B}{1-2z^{-1}}+\frac{C}{1+z^{-1}}$$

$$=\frac{2Az^{-1}\left(1+z^{-1}\right)+B\left(1-2z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)+C\left(1-2z^{-1}\right)^2}{\left(1-2z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{2Az^{-1}+2Az^{-2}+B-Bz^{-1}-2Bz^{-2}+C-4Cz^{-1}+4Cz^{-2}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{(B+C)+(2A-B-4C)z^{-1}+(2A-2B+4C)z^{-2}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-1}\right)}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$B+C=3$$
$$2A-B-4C=-5$$
$$2A-2B+4C=1$$

Skifter fortegn på den midterste likningen og legger sammen. Da blir

$$9C=9 \quad\Leftrightarrow\quad C=1$$

slik at

$$B=3-C=3-1=2.$$

Til slutt blir

$$2A=1+2B-4C=1+2\cdot 2-4\cdot 1=1 \quad\Leftrightarrow\quad A=\tfrac{1}{2}.$$

Dermed blir

$$X(z) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + 2 \cdot \frac{1}{1-2z^{-1}} + 1 \cdot \frac{1}{1+z^{-1}}$$

som invers-transformeres til

$$\{x_k\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{2} k \cdot 2^k + 2 \cdot 2^k + (-1)^k\right\}}} = \underline{\underline{\left\{k \cdot 2^{k-1} + 2^{k+1} + (-1)^k\right\}}}.$$

Oppgave 4.1.

4.3. Systemer av lineære differenslikninger.

Dersom du har fått tak på teknikken med å løse differenslikninger med Z-transform, vil det ikke by på store problemer å løse system av slike likninger. Vi går derfor rett løs på et eksempel:

Eksempel 4.4: Løs dette systemet av differenslikninger:

$$\begin{array}{lll} (1) & x_{k+1} = -x_k + 2y_k & x_0 = 1 \\ (2) & y_{k+1} = 2x_k + 2y_k \text{ ,} & y_0 = 0 \end{array}$$

Løsning: Starter med å Z-transformere begge likningene:

$$\begin{array}{l} z \cdot X(z) - z \cdot 1 = -X(z) + 2Y(z) \\ z \cdot Y(z) - z \cdot 0 = 2X(z) + 2Y(z) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} (z+1)X(z) - 2Y(z) = z \\ -2X(z) + (z-2)Y(z) = 0 \end{array}$$

Dette likningssystemet kan for eksempel løses med matrisemetoder:

$$\begin{bmatrix} z+1 & -2 \\ -2 & z-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ Y(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(z) \\ Y(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+1 & -2 \\ -2 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(z+1)(z-2)-4} \begin{bmatrix} z-2 & 2 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2 - z - 6} \begin{bmatrix} z^2 - 2z \\ 2z \end{bmatrix}$$

Faktoriserer nevneren:

$$z^2 - z - 6 = (z-3)(z-2),$$

slik at

$$X(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z-3)(z+2)} = \frac{1-2z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}}$$

$$= \frac{A(1+2z^{-1}) + B(1-3z^{-1})}{(1-3z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{(A+B) + (2A-3B)z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A + B = 1$$
$$2A - 3B = -2$$

Multipliserer øverste likning med 3 og legger sammen:

$$5A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{5},$$

$$B = 1 - A = 1 - \tfrac{1}{5} = \tfrac{4}{5}.$$

Dermed blir

$$X(z) = \frac{\frac{1}{5}}{1-3z^{-1}} + \frac{\frac{4}{5}}{1+2z^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \{x_k\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{1}{5}\cdot 3^k + \tfrac{4}{5}\cdot(-2)^k\right\}}}.$$

Nå gjenstår det bare å finne y_k. Det enkleste er ofte å benytte likning (1):

$$x_{k+1} = -x_k + 2y_k \quad \Leftrightarrow \quad y_k = \tfrac{1}{2}\left(x_{k+1} + x_k\right),$$

men for treningens skyld skal vi benytte samme framgangsmåte som da vi fant x_k:

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-3)(z+2)} = \frac{2z^{-1}}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)} = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}}$$

$$= \frac{A\left(1+2z^{-1}\right) + B\left(1-3z^{-1}\right)}{\left(1-3z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)} = \frac{(A+B) + (2A-3B)z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir

$$A + B = 0$$
$$2A - 3B = 2$$

Multipliserer øverste likning med 3 og legger sammen:

$$5A = 2 \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{2}{5},$$
$$B = -A = -\tfrac{2}{5}.$$

Dermed blir

$$Y(z) = \frac{\frac{2}{5}}{1-3z^{-1}} + \frac{-\frac{2}{5}}{1+2z^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \{y_k\} = \underline{\underline{\left\{\tfrac{2}{5}\cdot 3^k - \tfrac{2}{5}\cdot(-2)^k\right\}}}.$$

Oppgave 4.2.

Nå vil jeg anbefale at du tar en titt på diskrete systemer.