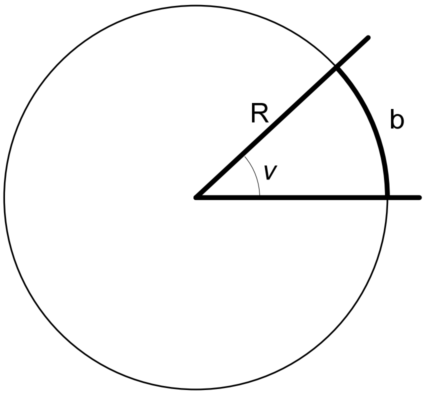
1. Grunnleggende trigonometri.

1.1. Vinkelmål.

Vinkler måles tradisjonelt i ***grader***. Utgangspunktet er da at en hel sirkel deles i 360 like store deler, der hver del kalles en ***grad***. En grad kan deles inn i 60 *bueminutter*, der hvert bueminutt igjen kan deles inn i 60 *buesekunder*. I matematikken bruker vi sjelden denne inndelingen i bueminutter og buesekunder. Når det er nødvendig å dele opp en grad, bruker vi heller vanlige desimaltall.



I matematikk er det ofte hensiktsmessig å bruke et annet vinkelmål, nemlig ***radianer***. Når vi måler en vinkel i radianer, tenker vi oss at vi slår en sirkel med sentrum i vinkelens topp-punkt. Da er vinkelens radiantall lik forholdet mellom lengden b av den sirkelbuen som vinkelen avskjærer og lengden R av radien, slik figuren til venstre viser:

$$v = \frac{b}{R}$$

Omregning mellom grader og radianer skjer etter formelen nedenfor:

> Når g er gradtallet til en vinkel, mens v er vinkelen målt i radianer, er
> $$\frac{g}{180} = \frac{v}{\pi}$$

Formelen følger av at forholdet mellom vinkelens gradtall og 360° er lik forholdet mellom buelengden og sirkelens omkrets:

$$\frac{g}{360} = \frac{b}{2\pi R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g}{180} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{R} = \frac{v}{\pi}.$$

Noen sammenhenger mellom grader og radianer for en vinkel er så vanlige at vi bør kjenne dem. Tabellen nedenfor viser noen slike sammenhenger. Fyll selv ut de rutene som mangler! Dersom du får problemer, kan du løse **oppgave 1.1.** først.

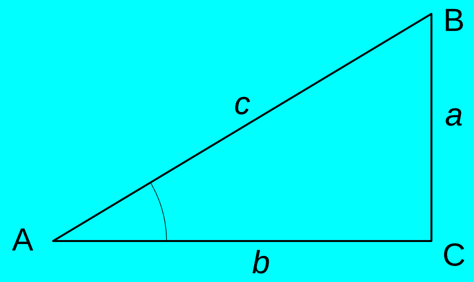
Grader	30	45	60	90	120			180	
Radianer	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$

1.2. Trigonometriske definisjoner for en rettvinklet trekant.

I utgangspunktet er de trigonometriske grunn-funksjonene ***sinus***, ***cosinus*** og ***tangens*** definert i forhold til en rettvinklet trekant på denne måten:

- **Sinus** til en vinkel er forholdet mellom *motstående* katet og hypotenusen.
- **Cosinus** til en vinkel er forholdet mellom *hosliggende* katet og hypotenusen.
- **Tangens** til en vinkel er forholdet mellom *motstående* katet og *hosliggende* katet.

Dette er illustrert i figuren nedenfor:



La C være den rette vinkelen i den rettvinklede trekanten ABC. La *a*, *b* og *c* være motstående sider til vinklene A, B og C. Da er:

- **Sinus** til A er $\sin A = \dfrac{a}{c}$.
- **Cosinus** til A er $\cos A = \dfrac{b}{c}$.
- **Tangens** til A er $\tan A = \dfrac{a}{b}$.

I praksis bruker vi gjerne kalkulator til å finne sinus, cosinus og tangens til en kjent vinkel. Vi bruker også kalkulator til å finne vinkelen når sinus, cosinus eller tangens er kjent. Da bruker vi de *inverse* trigonometriske funksjonene som vi skal se nærmere på senere.

Eksempel 1.1: I den rettvinklede trekanten ABC ovenfor vet vi at:

a) Siden $c = 0.69\,\text{m}$ og vinkel $A = 44.1^\circ$. Finn de andre sidene.

b) Siden $a = 1.24\,\text{m}$ og vinkel $A = 36.9^\circ$. Finn de andre sidene.

Løsning:

a) $$\sin A = \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad a = c \cdot \sin A = 0.69\,\text{m} \cdot \sin 44.1^\circ = 0.69\,\text{m} \cdot 0.6959 = \underline{\underline{0.48\,\text{m}}}.$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad b = c \cdot \cos A = 0.69\,\text{m} \cdot \cos 44.1^\circ = 0.69\,\text{m} \cdot 0.7181 = \underline{\underline{0.50\,\text{m}}}.$$

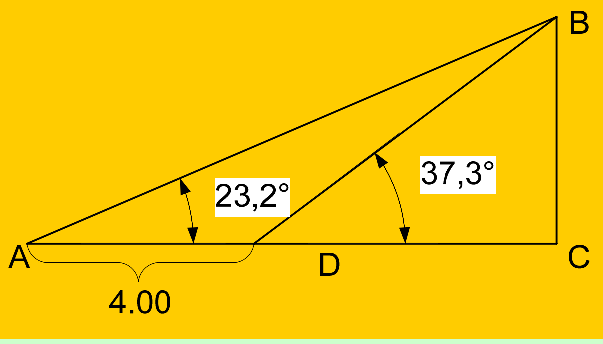
b) $$\sin A = \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a}{\sin A} = \frac{1.24\,\text{m}}{\sin 36.9^\circ} = \frac{1.24\,\text{m}}{0.600} = \underline{\underline{2.07\,\text{m}}}.$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a}{\tan A} = \frac{1.24\,\text{m}}{\tan 36.9^\circ} = \frac{1.24\,\text{m}}{0.7508} = \underline{\underline{1.65\,\text{m}}}.$$

Oppgave 1.2.

Etter denne innledende oppvarmingen kan vi se på et mer komplisert eksempel:

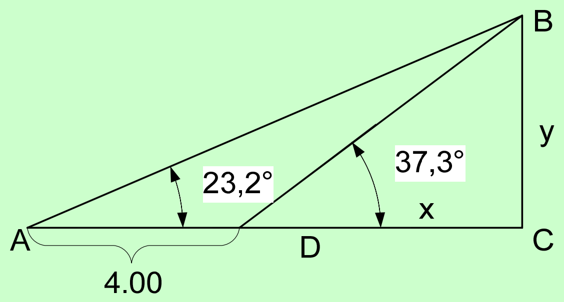
Eksempel 1.2



I den rettvinklede trekanten ABC til venstre er strekningen $AD = 4$, $\angle BAD = 23.2^\circ$, og $\angle BDC = 37.3^\circ$.

Finn lengdene av sidene *AB*, *AC* og *BC*.

Løsning:



Av figuren ser vi at:

$$\tan 37.3^\circ = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot \tan 37.3^\circ = \underline{0.762x}$$

og at

$$\tan 23.2^\circ = \frac{y}{x+4}$$

$$y = (x+4) \cdot \tan 23.2^\circ = 0.429(x+4)$$
$$= \underline{0.429x + 1.72}$$

Setter disse to uttrykkene for *y* lik hverandre, og får

$$0.762x = 0.429x + 1.72 \quad \Leftrightarrow \quad 0.333x = 1.72 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1.72}{0.333} = \underline{5.17}\,.$$

Da blir

$$y = 0.762x = 0.762 \cdot 5.17 = \underline{3.94}\,.$$

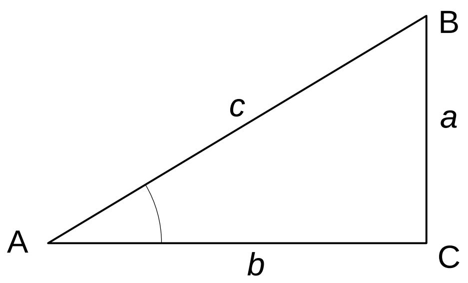
Nå nøster vi opp:

$$AC = AD + x = 4.00 + 5.17 = \underline{\underline{9.17}}\,.$$

$$BC = y = \underline{\underline{3.94}}\,.$$

$$\sin 23.2^\circ = \frac{y}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad AB = \frac{y}{\sin 23.2^\circ} = \frac{3.94}{0.394} = \underline{\underline{10.00}}\,.$$

Oppgave 1.3.



Fra figuren til venstre får vi at:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Den første sammenhengen ser vi slik:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A.$$

Den siste sammenhengen følger av Pytagoras' velkjente setning:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1.$$

Dessuten benytter vi den vanlige skrivemåten $\sin^2 A$ istedenfor $(\sin A)^2$, og tilsvarende for cosinus.

Eksempel 1.3:

a) Du vet at $\sin A = \frac{5}{13}$. Finn $\cos A$ og $\tan A$ uten å finne vinkelen A først.

b) Du vet at $\tan A = \frac{3}{4}$. Finn $\sin A$ og $\cos A$ uten å finne vinkelen A først.

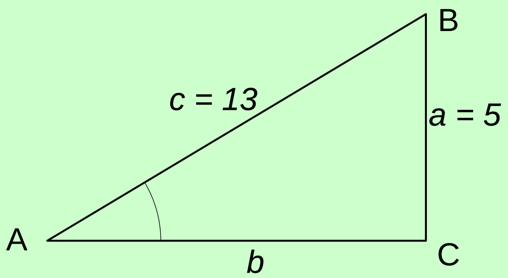
Løsning:

a) Når $\sin A = \frac{5}{13}$, blir

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{169}{169} - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \sqrt{\frac{144}{169}} = \underline{\underline{\frac{12}{13}}}.$$

Da blir

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}.$$



Dette kan vi også finne ved hjelp av den rettvinklede trekanten til venstre. Når $\sin A = \frac{5}{13}$, velger vi måleenhetene slik at $a = 5$ og $c = 13$. Dermed blir

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}.$$

Da blir

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$$
$$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = \underline{12}$$

Dette gir

$$\cos A = \frac{b}{c} = \underline{\underline{\frac{12}{13}}},$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}.$$

b) Oppgaven løses enklest med utgangspunkt i en rettvinklet trekant av samme type som i del a). Når $\tan A = \frac{3}{4}$, velger vi måleenhetene slik at $a = 3$ og $b = 4$. Dermed blir

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

Da blir

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \underline{5}.$$

Dette gir

$$\sin A = \frac{a}{c} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}},$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}.$$

Eksempel 1.4: Finn en formel for $\sin A$ uttrykt ved $\tan A$, og bruk denne formelen til å finne $\sin A$ når $\tan A = \frac{3}{4}$.

Løsning: Vet at

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A}.$$

Løser ut $\tan A$ ved å multiplisere med $1 - \sin^2 A$ på begge sider av likhetstegnet:

$$\tan^2 A(1 - \sin^2 A) = \sin^2 A \quad \Leftrightarrow \quad \tan^2 A - \tan^2 A \cdot \sin^2 A = \sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2 A = \tan^2 A \cdot \sin^2 A + \sin^2 A = (\tan^2 A + 1) \cdot \sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = \frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \underline{\underline{\frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}}}$$

Setter inn $\tan A = \frac{3}{4}$, og får

$$\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}.$$

Oppgave 1.4.

Dersom du tar utgangspunkt i samme figur som før, og setter opp sinus, cosinus og tangens til vinkelen B, vil du se at:

$$\sin B = \cos A, \qquad \cos B = \sin A, \qquad \tan B = \frac{1}{\tan A}.$$

I den rettvinklede trekanten er

$$A + B + C = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad A + B = 180^\circ - C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad B = 90^\circ - A$$

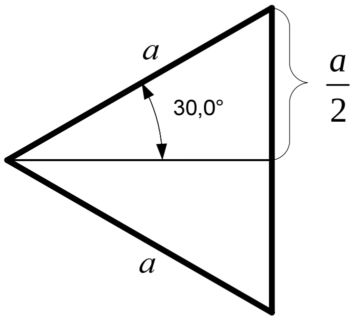
eller $B = \frac{\pi}{2} - A$. Av de to første sammenhengene ovenfor følger nå:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A$$

1.3. Noen spesielle vinkler.

Selv om vi i dag har kalkulatorer som gir ut verdier for sinus, cosinus og tangens, er det ofte nyttig å kjenne eksakte verdier for noen spesielle vinkler som forekommer ofte. Vi skal nå se hvordan vi kan finne fram til noen slike verdier.



Vi starter med vinkler på 30° og 60°. Vi tar da utgangspunkt i en rettvinklet trekant med vinkler på 30° og 60°. Den framkommer ved at det trekkes en rett linje fra et hjørne til motstående side i en likesidet trekant med sidelengde *a* slik figuren til venstre viser. Da får vi at:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Deretter finner vi $\cos 30^\circ$ slik:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30^\circ = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 30^\circ = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 30^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \underline{\underline{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}}$$

Til slutt blir:

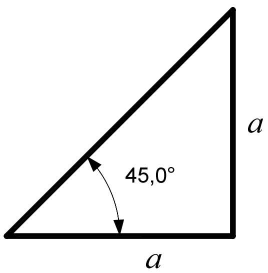
$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{3}}}.$$

Nå er det lett å finne sinus, cosinus og tangens til 60°. Vi kan enten bruke samme figur og samme framgangsmåte som ovenfor, eller vi kan benytte at:

$$\sin 60^\circ = \cos\left(90^\circ - 60^\circ\right) = \cos\left(30^\circ\right) = \underline{\underline{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}}.$$

$$\cos 60^\circ = \sin\left(90^\circ - 60^\circ\right) = \sin\left(30^\circ\right) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}.$$



Så tar vi for oss en vinkel på 45° på grunnlag av figuren til venstre. Ved hjelp av Pytagoras' setning finner vi at den lengste siden blir

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2},$$

slik at

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}.$$

Da blir

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = \underline{\underline{1}}.$$

Jeg vil anbefale at du nå samler resultatene i tabellen nedenfor. Der bør du også føre inn vinklene i radianer i tillegg til i grader.

Vinkel i grader	Vinkel i radianer	Sinus	Cosinus	Tangens
0				
30				
45				
60				
90				

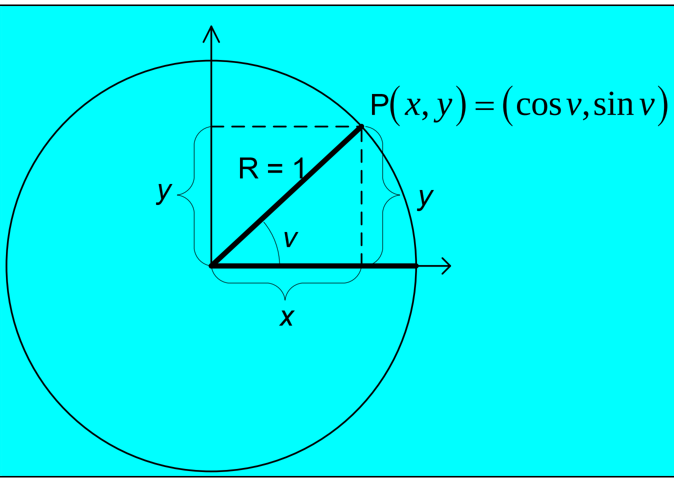
1.4. Generelle definisjoner av de trigonometriske funksjonene.

Hittil har vi holdt oss til rettvinklede trekanter. Da er det kun mulig å definere sinus, cosinus og tangens for vinkler mellom 0° og 90°. Vi trenger imidlertid definisjoner som gjelder for vinkler utenfor dette området. Dette ordner vi slik:

Slå en sirkel med sentrum i origo og radius $R = 1$ i et vanlig (kartesisk) koordinatsystem. En slik sirkel kalles en ***enhetssirkel***. Trekk ei rett linje fra sirkelens sentrum slik at linja danner en vinkel *v* med *x*-aksen. Linja skjærer sirkelen i et punkt *P* med koordinater (x, y). Se figuren nedenfor.

Legg merke til at vinkelen *v* ikke trenger å ligge mellom 0° og 90°, selv om den gjør det på figuren.

Nå kan vi definere sinus, cosinus og tangens slik:



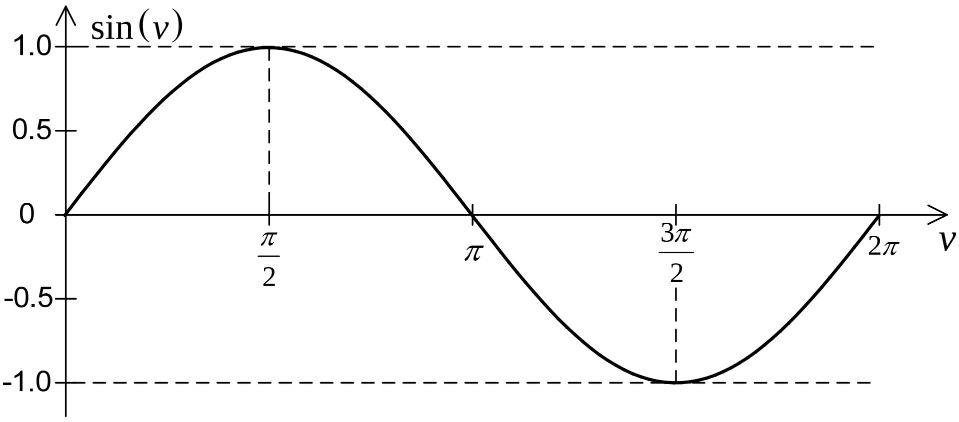
- $\sin v = \dfrac{y}{R} = y$.
- $\cos v = \dfrac{x}{R} = x$.
- $\tan v = \dfrac{y}{x}$.

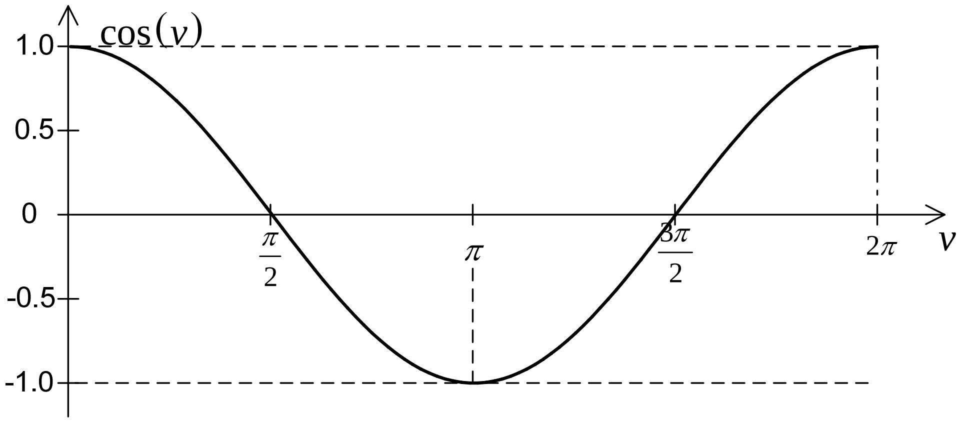
På denne måten kan sinus, cosinus og tangens til en vinkel defineres ut fra koordinatene til et punkt på enhetssirkelen.

Sinus, cosinus og tangens er egentlig funksjoner der *v* er den fri variable mens sinus-, cosinus- og tangens-verdiene er funksjonsverdier. Vi burde derfor skrevet *v*-en i parentes slik: $\sin(v)$,

$\cos(v)$ og $\tan(v)$. Når vi taster inn på kalkulatorer, må vi som regel benytte denne funksjons-skrivemåten. I vanlig skrift er det imidlertid blitt vanlig å sløyfe parentesene når dette kan gjøres uten at det oppstår misforståelser.

Nå som sinus, cosinus og tangens er blitt funksjoner, kan vi også tegne funksjonsgrafer. Grafen for $\sin v$ blir y-verdiene til punktet P på figuren, mens grafen for $\cos v$ blir x-verdiene til P. For vinkler mellom 0 og 2π (eller 0° og 360°) blir grafene for sinus og cosinus slik:





I en enhetssirkel kan vi godt ha negative vinkler. Vi kan også ha vinkler som er større enn 2π. Generelt har vi at:

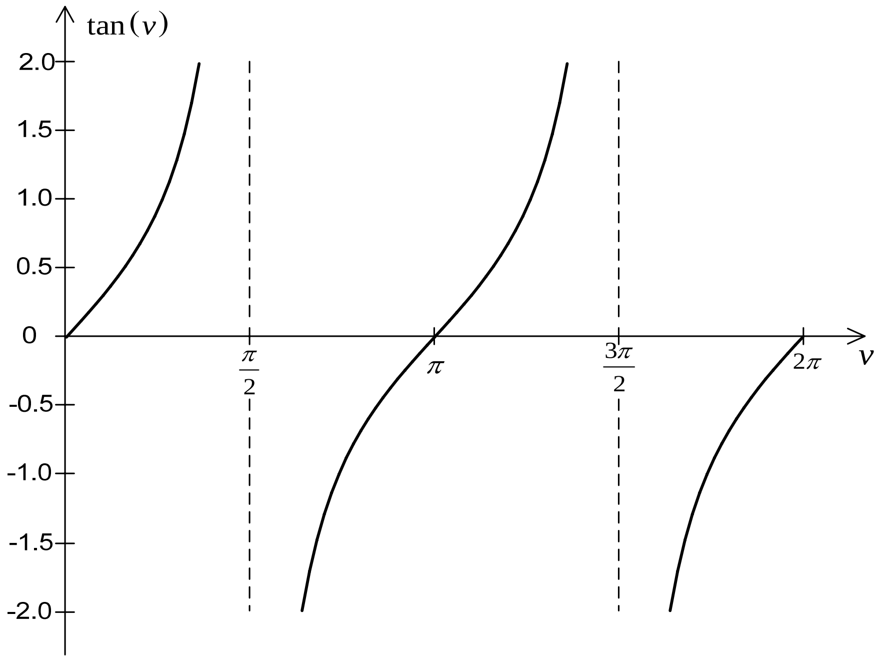
$$\sin(v \pm n \cdot 2\pi) = \sin v, \qquad \cos(v \pm n \cdot 2\pi) = \cos v, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Vi sier at sinus- og cosinus-funksjonene er ***periodiske*** med periode 2π. Dette medfører at du kan tegne sinus- og cosinus-grafer for alle mulige vinkler ved å kopiere sinus- eller cosinus-grafene ovenfor og forskyve dem en strekning $n \cdot 2\pi$ i begge retninger.

På grunnlag av sinus- og cosinus-verdiene kan vi nå beregne tangens-verdier. Grafen til tangens-funksjonen er vist nedenfor. Legg merke til at tangens-funksjonen ikke er definert når $v = \frac{\pi}{2}$ og når $v = \frac{3}{2}\pi$. Dette skyldes at nevneren ($\cos v$) i uttrykket

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

er lik null når $v = \frac{\pi}{2}$ og når $v = \frac{3}{2}\pi$.

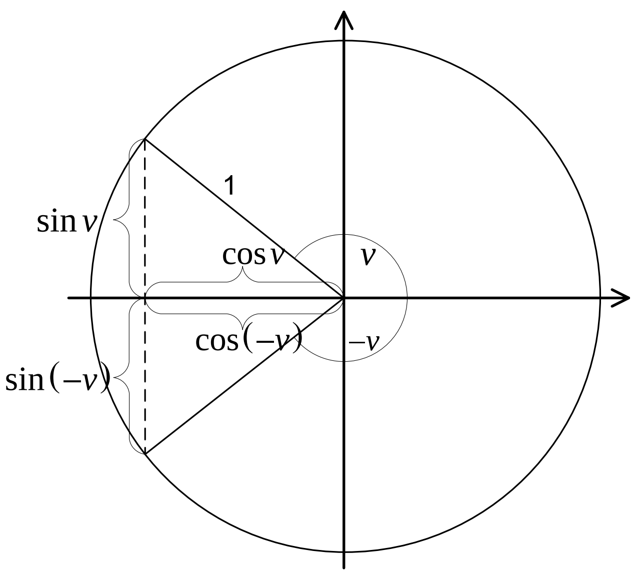


Av grafen merker vi oss at mens sinus- og cosinus-funksjonene er periodiske med periode 2π, er tangens-funksjonen periodisk med periode π.

Disse grafene for sinus, cosinus og tangens bør du kjenne så godt at du uten videre kan skissere dem opp. Merk spesielt verdiene for skjæringene med *v*-aksen. For sinus- og cosinus-grafene bør du dessuten kjenne og topp- og bunnpunkt, og for tangens-grafen bør du kjenne de vinklene der grafen ikke er kontinuerlig.

1.5. Noen viktige sammenhenger.

1.5.1. Negative vinkler.



Figuren til venstre viser en vinkel v sammen med vinkelen $-v$ i en enhetssirkel. Av figuren får vi:

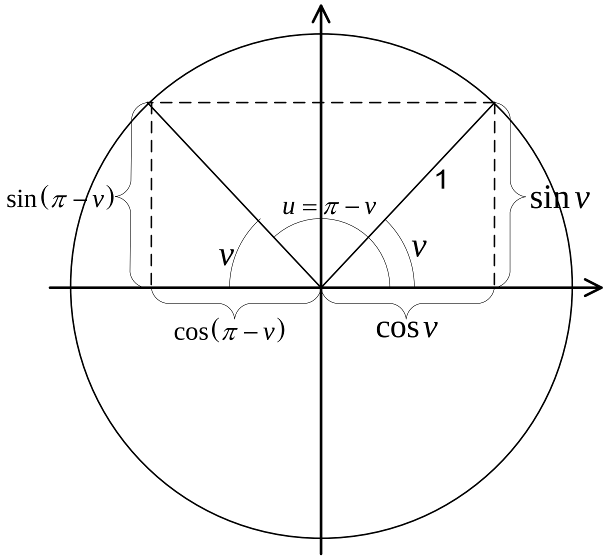
$$\sin(-v) = -\sin v$$
$$\cos(-v) = \cos v$$
$$\tan(-v) = -\tan v$$

Den siste sammenhengen får vi fordi

$$\tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin v}{\cos v} = \underline{\underline{-\tan v}}.$$

1.5.2. Supplementvinkler.

To vinkler u og v er ***supplementvinkler*** dersom $u+v=\pi$.



Figuren til venstre viser de to supplementvinklene v og $u=\pi-v$ i en enhetssirkel. Av figuren får vi:

$$\sin(\pi-v)=\sin v$$
$$\cos(\pi-v)=-\cos v$$
$$\tan(\pi-v)=-\tan v$$

Den siste sammenhengen får vi fordi

$$\tan(\pi-v)=\frac{\sin(\pi-v)}{\cos(\pi-v)}=\frac{\sin v}{-\cos v}=\underline{\underline{-\tan v}}$$

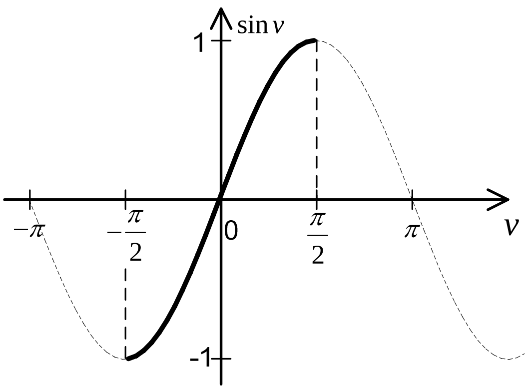
1.6. Inverse trigonometriske funksjoner.

Hittil har vi tatt utgangspunkt i en vinkel v og funnet sinus, cosinus eller tangens til denne vinkelen. Men vi har ofte bruk for å gå motsatt vei: Vi kjenner en sinus-, cosinus- eller tangensverdi, og ønsker å finne den tilhørende vinkelen. Vi oppfatter da vinkelen v som funksjon av sinus-, cosinus- eller tangensverdien. Slike funksjoner kaller vi ***inverse trigonometriske funksjoner*** eller ***arcus-funksjoner***. Vi har tre av dem:

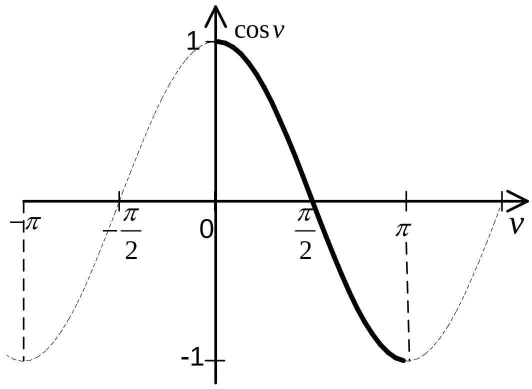
Arcus sinus brukes til å finne en vinkel når vi kjenner sinusverdien til vinkelen. Vi definerer arcus sinus-funksjonen slik:

$$y=\sin v \quad \Leftrightarrow \quad v=\arcsin y\,.$$

Vi kan også skrive $v=\sin^{-1} y$ istedenfor $v=\arcsin y$.



Det er et generelt krav til funksjoner at de skal være entydige. For arcus sinus-funksjonen innebærer dette at når vi kjenner en sinusverdi, må vinkelen være entydig bestemt. Dette medfører at vi kun kan benytte vinkler i området $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Dersom vi tillater vinkler utenfor dette området, er ikke vinkelen entydig bestemt når vi kjenner sinus-verdien.



Arcus cosinus brukes til å finne en vinkel når vi kjenner cosinusverdien til vinkelen. Vi definerer arcus cosinus-funksjonen slik:

$$y = \cos v \quad \Leftrightarrow \quad v = \arccos y\,.$$

Vi kan også skrive $v = \cos^{-1} y$ istedenfor $v = \arccos y$.

For at arcus cosinus-funksjonen skal være entydig, kan vi kun benytte vinkler i området $[0,\, \pi]$, som angitt på figuren til venstre.

Arcus tangens brukes til å finne en vinkel når vi kjenner tangensverdien til vinkelen. Vi definerer arcus tangens-funksjonen slik:

$$y = \tan v \quad \Leftrightarrow \quad v = \arctan y\,.$$

Vi kan også skrive $v = \tan^{-1} v$ istedenfor $v = \arctan y$.

For at arcus tangens-funksjonen skal være entydig, kan vi kun benytte vinkler i området $\left\langle -\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dette innser du ved å se hvordan tangens-grafen ser ut.

Vi oppsummerer:

$$\begin{aligned}
y &= \sin v, \quad v \in \left[-\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \Leftrightarrow \quad v = \arcsin y = \sin^{-1} y \\
y &= \cos v, \quad v \in [0,\, \pi] \quad \Leftrightarrow \quad v = \arccos y = \cos^{-1} y \\
y &= \tan v, \quad v \in \left\langle -\tfrac{\pi}{2},\, \tfrac{\pi}{2} \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad v = \arctan y = \tan^{-1} y
\end{aligned}$$

Eksempel 1.5: Hva er:

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$?

b) $\arccos(-1)$?

c) $\arctan(1)$?

Løsning:

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$ (eller 30°) fordi $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

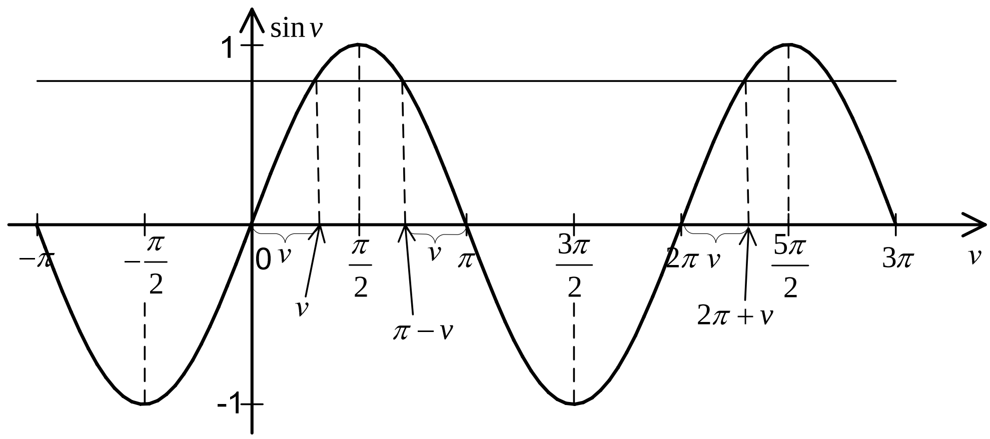
b) $\arccos(-1) = \underline{\underline{\pi}}$ (eller 180°) fordi $\cos\pi = -1$.

c) $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (eller 45°) fordi $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Oppgave 1.5.

1.7. Vinkler med samme sinus- eller cosinus-verdi.

Selv om arcus-funksjonene kun er definert innenfor begrensede vinkelområder, må vi ofte gå utenfor disse områdene. Vi skal nå se hvordan vi kan finne flere forskjellige vinkler som har samme sinus-verdi eller samme cosinus-verdi. Vi starter da med å tegne en sinus-graf, men forlenger den i begge retninger så langt vi har behov for. Vi får da en figur som vist nedenfor:



På figuren har vi tegnet inn en horisontal linje for en tilfeldig verdi av $\sin v$. Videre er det avmerket tre forskjellige vinkler som har samme sinus-verdi. Vi ser at

$$\sin v = \sin(\pi - v) = \sin(2\pi + v).$$

Legg spesielt merke til den første likheten:

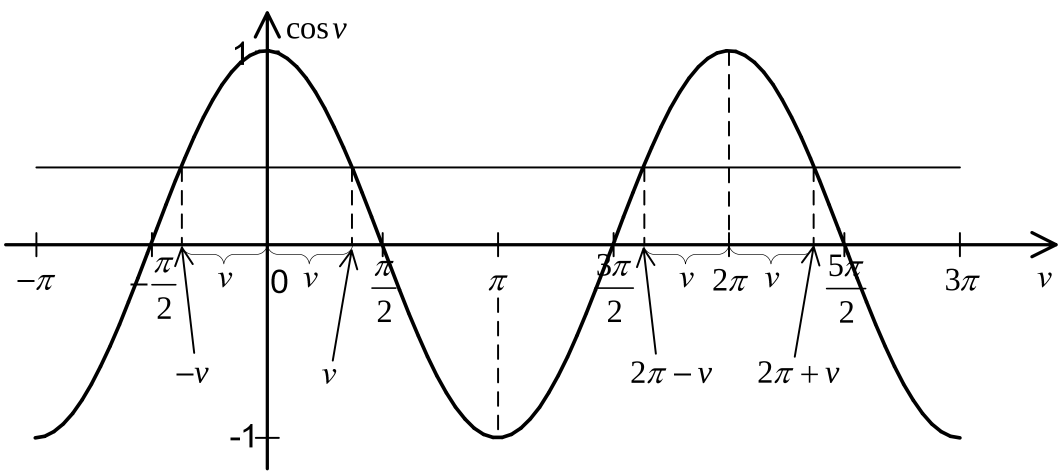
$$\sin v = \sin(\pi - v).$$

Den siste likheten,

$$\sin v = \sin(2\pi + v),$$

kommer av at sinus-funksjonen er periodisk med periode 2π.

På samme måte kan vi tegne en cosinus-graf, og forlenge den forbi området $[0, 2\pi]$. Vi får da figuren nedenfor:



På figuren har vi tegnet inn en horisontal linje for en tilfeldig verdi av $\cos v$. Videre er det avmerket 4 forskjellige vinkler som har samme cosinus-verdi:

$$\cos v = \cos(-v) = \cos(2\pi - v) = \cos(2\pi + v).$$

Vi kan faktisk sette opp disse sammenhengene uten å tegne cosinus-grafen først. Vi vet fra før at

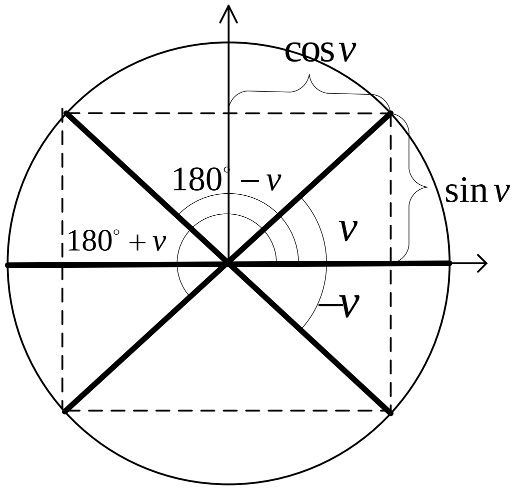
$$\cos v = \cos(-v).$$

Videre vet vi at cosinus-funksjonen er periodisk med periode 2π. Da er også

$$\cos(-v) = \cos(2\pi - v),$$

og

$$\cos v = \cos(2\pi + v).$$



Enhetssirkelen er svært nyttig til å oppdage sammenhenger mellom vinkler. Av figuren til venstre skal det være mulig å se at:

$$\sin(-v) = -\sin v$$
$$\cos(-v) = \cos v$$

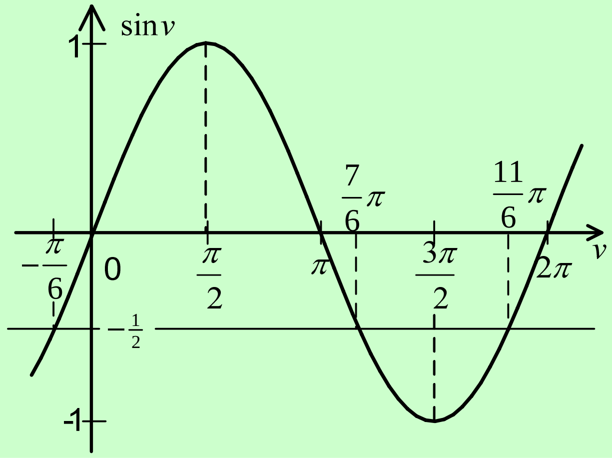
$$\sin(\pi - v) = \sin v$$
$$\cos(\pi - v) = -\cos v$$

$$\sin(\pi + v) = -\sin v$$
$$\cos(\pi + v) = -\cos v$$

Eksempel 1.6: Bruk graf og/eller enhetssirkel til å finne de vinklene *v* som er slik at:

$$\sin v = -\tfrac{1}{2}, \qquad 0 \le v < 2\pi.$$

Løsning:



På figuren har vi tegnet inn en sinusgraf, og linja $\sin v = -\frac{1}{2}$.

Linjene skjærer hverandre når $v = -\frac{\pi}{6}$.

Dette ser du fordi du vet at $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ og at $\sin(-v) = -\sin v$. Da må

$$\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) = -\tfrac{1}{2}.$$

Men denne verdien ligger ikke i området $0 \le v < 2\pi$. Vi må derfor legge til 2π, og får at

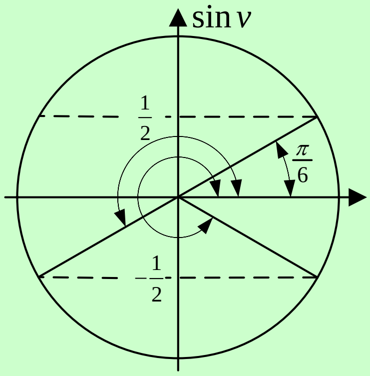
$$v = -\tfrac{\pi}{6} + 2\pi = \underline{\underline{\tfrac{11}{6}\pi}}.$$

Men du får en løsning til. På grunn av symmetrien rundt $v = \frac{3}{2}\pi$ ser du at denne løsningen må bli

$$v = \pi + \tfrac{\pi}{6} = \underline{\underline{\tfrac{7}{6}\pi}}\,.$$

En mer formell framgangsmåte er å benytte at $\sin(\pi - v) = \sin v$. Da blir

$$\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(\tfrac{7}{6}\pi\right).$$



Så var det bruk av enhetssirkel. På figuren til venstre har vi tegnet inn stiplede linjer for $\sin v = \tfrac{1}{2}$ og $\sin v = -\tfrac{1}{2}$.

Du vet at når $v = \tfrac{\pi}{6}$ er $\sin v = \tfrac{1}{2}$.

Da ser du av enhetssirkelen at de to vinklene som har $\sin v = -\tfrac{1}{2}$ er

$$v = \tfrac{\pi}{6} + \pi = \underline{\underline{\tfrac{7}{6}\pi}}$$

og

$$v = 2\pi - \tfrac{\pi}{6} = \underline{\underline{\tfrac{11}{6}\pi}}\,.$$

Oppgave 1.6.

Nå har du de kunnskapene du trenger til å gå løs på generelle trekantberegninger. Dersom du er interessert i navigasjon, kan du deretter se på sfærisk trigonometri.

1.8. Enkle trigonometriske likninger.

Vi får ofte bruk for å løse likninger som inneholder trigonometriske funksjoner. Det fins ingen standard metoder eller formler for å løse slike likninger. Men noen teknikker går igjen, og vil bli demonstrert i eksemplene nedenfor.

Eksempel 1.7: Løs disse likningene:

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$.

b) $2\sin^2 x - \sin x = 1, \quad x \in [0, 2\pi]$.

c) $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$.

Løsning:

a) Vi merker oss at $\cos x = 0$ ikke kan være løsning av likningen. For når $\cos x = 0$, er $\sin x = \pm 1$, og da er ikke likningen oppfylt. Vi kan derfor dele likningen på $\cos x$ uten å risikere å dele på null, og får en likning i $\tan x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = -\sqrt{3}\,.$$

Bruker vi nå kalkulator, får vi at $x = -\tfrac{\pi}{3}$. Men denne verdien ligger ikke i grunnmengden som er $[0, 2\pi]$. Men vi vet at tangens-funksjonen er periodisk med periode π. Vi får derfor at

$$x = -\tfrac{\pi}{3} + \pi = \underline{\tfrac{2}{3}\pi}$$

og

$$x = -\tfrac{\pi}{3} + 2\pi = \underline{\tfrac{5}{3}\pi}$$

er brukbare løsninger. Løsningsmengden blir da

$$\underline{\underline{\left(\tfrac{2}{3}\pi,\ \tfrac{5}{3}\pi\right)}}.$$

b) Dette er en andregradslikning i $\sin x$. Vi får ved hjelp av formel at

$$2\sin^2 x - \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} \underline{1} \\ \underline{-\tfrac{1}{2}} \end{cases}.$$

Det er kun en x-verdi i området $[0,\ 2\pi]$ som gir $\sin x = 1$, og det er $x = \underline{\tfrac{\pi}{2}}$.
Fra Eksempel 1.6 foran vet vi at når $\sin x = -\tfrac{1}{2}$ og $x \in [0,\ 2\pi]$, så er $x = \underline{\tfrac{7}{6}\pi}$ eller $x = \underline{\tfrac{11}{6}\pi}$. Sammen med løsningen $x = \underline{\tfrac{\pi}{2}}$ får vi at løsningsmengden blir

$$\underline{\underline{\left(\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{7}{6}\pi,\ \tfrac{11}{6}\pi\right)}}.$$

c) Også dette er en andregradslikning. Men her er $\sin x$ felles faktor i begge leddene, og kan settes utenfor parentes:

$$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(\sin x - \cos x) = 0.$$

Nå vet vi at et produkt er lik null hvis og bare hvis minst en av faktorene er lik null. Dette gir, når $x \in [0,\ 2\pi]$:

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \sin x - \cos x = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pi}\right) \quad \vee \quad (\tan x - 1 = 0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pi}\right) \quad \vee \quad (\tan x = 1)$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x = \underline{0} \quad \vee \quad x = \underline{\pi}\right) \quad \vee \quad \left(x = \underline{\tfrac{1}{4}\pi} \quad \vee \quad x = \tfrac{1}{4}\pi + \pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi}\right)$$

Løsningsmengden blir altså

$$\underline{\underline{\left(0,\ \tfrac{1}{4}\pi,\ \pi,\ \tfrac{5}{4}\pi\right)}}.$$

Oppgave 1.7.

1.9. Noen trigonometriske identiteter.

Vi kan utlede en vrimmel av trigonometriske identiteter. Vi har allerede sett på noen slike, der sammenhengene

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

og

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

er de viktigste.

Jeg skal uten bevis føre opp to nye identiteter som kan danne utgangspunkt for mange andre:

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$
$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

Du finner bevis for disse identitetene i et eget notat.

La oss se på noen av de mange formlene vi kan utlede på grunnlag av disse to. Vi starter med å benytte at $\sin(-v) = -\sin v$ og at $\cos(-v) = \cos v$. Da får vi at:

$$\begin{aligned}\sin(u-v) &= \sin(u+(-v)) \\ &= \sin u \cdot \cos(-v) + \cos u \cdot \sin(-v) \\ &= \underline{\underline{\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(u-v) &= \cos(u+(-v)) \\ &= \cos u \cdot \cos(-v) - \sin u \cdot \sin(-v) \\ &= \underline{\underline{\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v}}\end{aligned}$$

Dersom vi setter $u = v$ i formlene for $\sin(u+v)$ og $\cos(u+v)$, får vi disse nye identitetene:

$$\begin{aligned}\sin(2v) &= 2\sin v \cdot \cos v \\ \cos(2v) &= \cos^2 v - \sin^2 v \\ &= 2\cos^2 v - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 v\end{aligned}$$

Alle disse identitetene (og flere til) er grundigere behandlet og bevist i et eget notat om trigonometriske identiteter. Identitetene for $\sin(u+v)$ og $\cos(u+v)$ benyttes også i et notat om generelle sinus- og cosinus-funksjoner, som er nyttig bl.a. innenfor elektronikk og elektroteknikk. Disse notatene er nyttig som bakgrunn for et notat om trigonometriske likninger og ulikheter som går lenger den innføringen som ble gitt forrige punkt.