5. Trigonometriske likninger og ulikheter.

5.1. Trigonometriske likninger.

Vi har tidligere snust litt på enkle trigonometriske likninger. Vi skal nå se mer på dette temaet. Du må bare innstille deg på at nå er det ingen standard formler eller standard teknikker som skal benyttes. Løsning av trigonometriske likninger krever kreativitet og fantasi (og erfaring), kombinert med kjennskap til trigonometriske identiteter. Jeg vil derfor anbefale at du går gjennom notatene om trigonometriske identiteter og om generelle sinus- og cosinusfunksjoner før du går løs på dette notatet.

Det er imidlertid noen teknikker som går igjen, uten at man kan sette opp enkle regler for når man skal bruke den ene eller den andre teknikken. Her er noen teknikker som kan komme til anvendelse:

- Dersom likningen kan skrives på formen
  $$f(x)=0,$$
  og $f(x)$ kan faktoriseres, må hver av faktorene være lik null. På denne måten kan en komplisert likning splittes opp i flere enklere likninger.

- Det kan ofte lønne seg å omforme uttrykk av typen
  $$S\cdot\sin x + C\cdot\cos x$$
  til
  $$A\sin(x+\varphi).$$

- Dersom likningen er *homogen* i $\sin x$ og $\cos x$ (d.v.s. at alle leddene inneholder $\sin x$- og $\cos x$- ledd av samme grad), kan likningen omformes til en likning i $\tan x$ ved å dele på $\cos x$.

- Husk at
  $$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$
  Dette kan brukes til å "bytte ut" $\sin^2 x$-ledd med $\cos^2 x$-ledd og omvendt. Det kan også brukes til å erstatte brysomme konstanter med $\sin^2 x$- og $\cos^2 x$-ledd.

- Dersom likningen inneholder $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ og / eller $\tan(2x)$, lønner det seg vanligvis å omforme likningen ved hjelp av trigonometriske identiteter for disse størrelsene.

Noen ganger kan et problem angripes på flere måter, noe eksemplene nedenfor vil illustrere.

Eksempel 5.1: Løs de trigonometriske likningene nedenfor. Gå ut fra at $x\in\left[0,2\pi\right\rangle$.

a) $\sin(2x)+2\sin^2 x=1.$

b) $2\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x=\sin(2x)$

c) $\sqrt{3}\cos(2x)+3\sin(2x)=3$

Løsning:

a) $\sin(2x) + 2\sin^2 x = 1$.

Første innskytelse er å benytte at
$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x .$$
Da omformes likningen til
$$2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = 1 .$$

Nå må vi bruke et lite trick: Vi bytter ut 1-tallet på høyre side med $\sin^2 x + \cos^2 x$. Da blir likningen
$$2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

Denne likningen er homogen i $\sin x$ og $\cos x$. Vi ser at $\cos x = 0$ ikke kan være løsning av likningen, slik at vi kan dele på $\cos^2 x$ uten å risikere å dele på null. Da får vi:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$$
$$\tan x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \underline{-1 \pm \sqrt{2}}$$

Disse tangens-verdiene inngår ikke i vår samling av standard-verdier. Men min kalkulator gir at
$$\arctan\left(-1 + \sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{8}\pi$$
og
$$\arctan\left(-1 - \sqrt{2}\right) = -\tfrac{3}{8}\pi .$$

Når vi benytter at tangens-funksjonen er periodisk med periode π, og husker at $x \in [0, 2\pi\rangle$, får vi disse løsningene:
$$x_1 = \underline{\underline{\tfrac{1}{8}}}\pi .$$
$$x_2 = \tfrac{1}{8}\pi + \pi = \underline{\underline{\tfrac{9}{8}}}\pi .$$
$$x_3 = -\tfrac{3}{8}\pi + \pi = \underline{\underline{\tfrac{5}{8}}}\pi .$$
$$x_4 = -\tfrac{3}{8}\pi + 2\pi = \underline{\underline{\tfrac{13}{8}}}\pi .$$

Det går imidlertid an å være litt smartere. Vi husker da at
$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x ,$$
og omformer den gitte likningen slik:
$$\sin(2x) + 2\sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \cos(2x) .$$
Nå deler vi på $\cos(2x)$, og får

$\tan(2x)=1$.

Nå må vi huske på at når $x \in [0,2\pi\rangle$, er $2x \in [0,4\pi\rangle$. Vi får da disse løsningene:

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\underline{\tfrac{1}{8}\pi}}.$$

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi+\pi=\tfrac{5}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\underline{\tfrac{5}{8}\pi}}.$$

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi+2\pi=\tfrac{9}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\underline{\tfrac{9}{8}\pi}}.$$

$$2x=\tfrac{1}{4}\pi+3\pi=\tfrac{13}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\underline{\tfrac{13}{8}\pi}}.$$

b) $2\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x=\sin(2x)$.

Her er det naturlig å starte med å omforme $\sin(2x)$ til $2\sin x\cdot\cos x$:

$$2\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x=2\sin x\cdot\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x+1\right)=0$$

Her er enten

$$\cos x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\underline{\frac{\pi}{2}} \\ x=\underline{\frac{3}{2}\pi} \end{cases}$$

eller

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x-\sqrt{3}\cos x=1.$$

For å løse den siste likningen, skal vi skrive

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x$$

på formen

$$A\sin(x+\varphi)=A(\sin x\cdot\cos\varphi+\cos x\cdot\sin\varphi)=(A\cos\varphi)\sin x+(A\sin\varphi)\cos x.$$

Vi må da kreve at

$$A\cos\varphi=1$$

og at

$$A\sin\varphi=-\sqrt{3}.$$

Vi kvadrerer disse likningene og legger sammen kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi+A^2\sin^2\varphi=1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad A^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \quad A^2\cdot 1=4 \quad \Leftrightarrow \quad A=\underline{2}$$

Deler uttrykkene på hverandre:

$$\frac{\cancel{A}\sin\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi}=\frac{-\sqrt{3}}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\varphi=-\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi=\begin{cases} \underline{-\frac{\pi}{3}} \\ -\frac{\pi}{3}+\pi=\underline{\frac{2}{3}\pi} \end{cases}$$

Av uttrykkene $A\cos\varphi = 1$ og $A\sin\varphi = -\sqrt{3}$ ser vi at det kun er løsningen $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ som gir positiv *A*. Dermed har vi at

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right).$$

Nå nøster vi oss tilbake:

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Vi husker at

$$\sin v = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v = \frac{1}{6}\pi \\ v = \frac{5}{6}\pi \end{cases}.$$

Erstatter vi *v* med $x - \frac{1}{3}\pi$, og husker at $x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$, får vi:

$$\sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi & \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi = \underline{\frac{1}{2}\pi} \\ x - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi & \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi = \underline{\frac{7}{6}\pi} \end{cases}$$

Når vi kombinerer med de løsningene vi har fra før, får vi denne løsningsmengden:

$$\underline{\underline{\left(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{7}{6}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right)}}.$$

c) $\sqrt{3}\cos(2x) + 3\sin(2x) = 3$.

Denne likningen kan løses på (minst) to måter. Først skal jeg angripe problemet med å bruke identiteter for $\sin(2x)$ og $\cos(2x)$:

$$\sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 3.$$

Planen er å dele hele likningen med $\cos^2 x$, slik at jeg får en likning i $\tan x$. Men 3-tallet på høyre side forpurrer denne planen. Jeg oppfatter derfor dette 3-tallet som

$$3 \cdot 1 = 3\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x.$$

Likningen blir da

$$\sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(3 + \sqrt{3}\right)\sin^2 x - 6\sin x \cdot \cos x + \left(3 - \sqrt{3}\right)\cos^2 x = 0$$

Nå kan jeg dele på $\cos^2 x$, og får andregradslikningen

$$\left(3 + \sqrt{3}\right)\tan^2 x - 6\tan x + \left(3 - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Løser med formel:

$$\tan x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(9-3)}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{2\left(3 \pm \sqrt{3}\right)}{2\left(3+\sqrt{3}\right)} = \begin{cases} \underline{1} \\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \dfrac{12-6\sqrt{3}}{6} = \underline{2-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vi vet at

$$\tan x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{\tfrac{1}{4}\pi} \\ x = \tfrac{1}{4}\pi + \pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi} \end{cases}$$

Ved hjelp av kalkulator får vi at

$$\arctan\left(2-\sqrt{3}\right) = \underline{\tfrac{1}{12}\pi}\,.$$

Da har vi også løsningen

$$x = \tfrac{1}{12}\pi + \pi = \underline{\tfrac{13}{12}\pi}\,.$$

Alt i alt blir løsningsmengden

$$\underline{\underline{\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{13}{12}\pi \right\}}}.$$

Jeg kan også angripe problemet ved å skrive

$$\sqrt{3}\cos(2x) + 3\sin(2x)$$

på formen

$$A\sin(2x+\varphi) = A\left(\sin(2x)\cos\varphi + \cos(2x)\sin\varphi\right)$$
$$= (A\cos\varphi)\cdot\sin(2x) + (A\sin\varphi)\cdot\cos(2x)$$

Da må vi ha

$$A\cos\varphi = 3$$

og

$$A\sin\varphi = \sqrt{3}\,.$$

Kvadrerer likningene, og summerer kvadratene:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 3^2 + \sqrt{3}^3 \quad \Leftrightarrow \quad A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 9 + 3$$
$$\Leftrightarrow \quad A^2 \cdot 1 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad A = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \underline{2\sqrt{3}}$$

Deler likningene på hverandre, og får

$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi = \tfrac{1}{6}\pi \\ \varphi = \tfrac{1}{6}\pi + \pi = \tfrac{7}{6}\pi \end{cases}$$

Det er kun løsningen $\varphi = \tfrac{1}{6}\pi$ som gir positiv verdi for A. Vi har altså funnet at

$$\sqrt{3}\cos(2x)+3\sin(2x)=2\sqrt{3}\sin\left(2x+\tfrac{1}{6}\pi\right)=3$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x+\tfrac{1}{6}\pi\right)=\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

Vi vet at

$$\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\begin{cases}\underline{\tfrac{1}{3}\pi} \\ \pi-\tfrac{1}{3}\pi=\underline{\tfrac{2}{3}\pi}\end{cases}$$

Da blir

$$2x+\tfrac{1}{6}\pi=\begin{cases}\tfrac{1}{3}\pi & \Leftrightarrow \quad 2x=\tfrac{1}{3}\pi-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{6}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\tfrac{1}{12}\pi} \\ \tfrac{2}{3}\pi & \Leftrightarrow \quad 2x=\tfrac{2}{3}\pi-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{3}{6}\pi=\tfrac{1}{2}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\tfrac{1}{4}\pi}\end{cases}$$

Men siden $x\in[0,2\pi\rangle$, må $2x\in[0,4\pi\rangle$. Da kan vi også ha at

$$2x+\tfrac{1}{6}\pi=\begin{cases}\tfrac{1}{3}\pi+2\pi=\tfrac{7}{3}\pi & \Leftrightarrow \quad 2x=\tfrac{7}{3}\pi-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{13}{6}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{\tfrac{13}{12}\pi} \\ \tfrac{2}{3}\pi+2\pi=\tfrac{8}{3}\pi & \Leftrightarrow \quad 2x=\tfrac{8}{3}\pi-\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{15}{6}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\tfrac{15}{12}\pi=\underline{\tfrac{5}{4}\pi}\end{cases}$$

Dette gir den samme løsningsmengden som før:

$$\underline{\underline{\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi,\frac{\pi}{12},\frac{13}{12}\pi\right\}}}.$$

[**Oppgave 5.1.**]

5.1. Trigonometriske ulikheter.

Du kjenner sikkert teknikken med å løse vanlige ulikheter: Ordne ulikheten slik at du har null på høyre side, faktorisere venstre side, og sette opp fortegnslinjer for hver faktor. I intervaller der du har odde antall negative faktorer, blir produktet eller brøken negativ. I intervaller der du har jamt antall negative faktorer blir produktet eller brøken positiv.

Du kan bruke denne teknikken for trigonometriske ulikheter også. Men det viser seg ofte at metoden blir komplisert. Jeg vil derfor anbefale en annen metode:

1. Løs først den tilhørende likningen (d.v.s. at du erstatter ulikhetstegnet med likhetstegn), og merker av alle nullpunktene på en tall-linje.
2. Bestem verdien av ulikheten i ett tilfeldig valgt punkt mellom to nabo-nullpunkter. Da vil ulikheten ha samme verdi i hele intervallet mellom disse nullpunktene. Gjenta for alle intervallene i hele ulikhetens grunnmengde.

Jeg vil anbefale at du kontrollerer resultatet grafisk.

Jeg vil illustrere teknikken i eksemplene nedenfor.

Eksempel 5.2: Løs ulikhetene nedenfor, der $x \in [0, 2\pi\rangle$ i alle eksemplene.

a) $\sin x > \cos x$

b) $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ (se Eksempel 5.1b ovenfor).

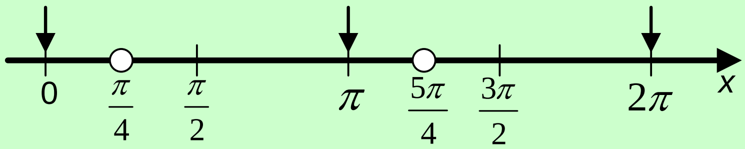
Løsning:

a) $\sin x > \cos x$.

Starter med å løse likningen

$$\sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \underline{\tfrac{1}{4}\pi} \\ x = \tfrac{1}{4}\pi + \pi = \underline{\tfrac{5}{4}\pi} \end{cases}$$

Vi får da tall-linja nedenfor, der nullpunktene er tegnet inn sammen med angivelse av punkter mellom nullpunktene som jeg benytter til å finne verdien av ulikheten.



$x = 0$: Her er $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, slik at $\sin 0 < \cos 0$. Da er $\sin x < \cos x$ i hele intervallet $[0, \tfrac{1}{4}\pi\rangle$.

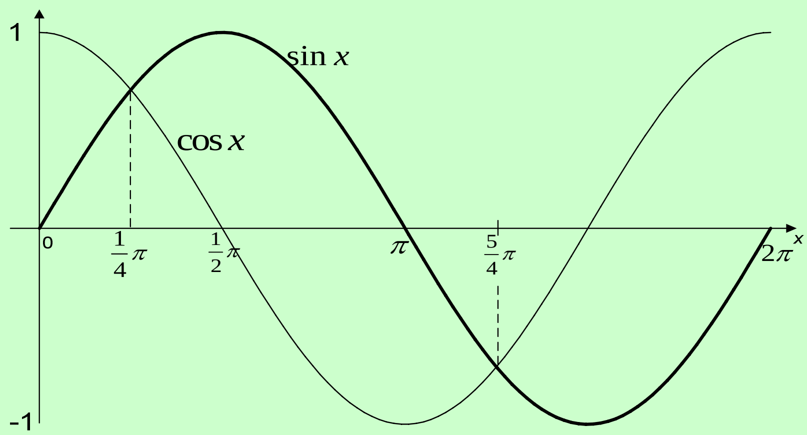
$x = \pi$: Her er $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, slik at $\sin\pi > \cos\pi$. Da er $\sin x > \cos x$ i hele intervallet $\langle\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi\rangle$.

$x = 2\pi$: Her er $\sin(2\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$, slik at $\sin(2\pi) < \cos(2\pi)$. Da er $\sin x < \cos x$ i hele intervallet $\langle\tfrac{5}{4}\pi, 2\pi\rangle$.

Du stusser kanskje over at vi bruker $x = 2\pi$ som grunnlag for å undersøke verdien av ulikheten selv om denne *x*-verdien ligger utenfor ulikhetens grunnmengde. Men det kan vi godt gjøre, fordi den tilhørende likningen ikke har noe nullpunkt før vi kommer til $x = \tfrac{1}{4}\pi + 2\pi = \tfrac{9}{4}\pi$.

Vi summerer opp:

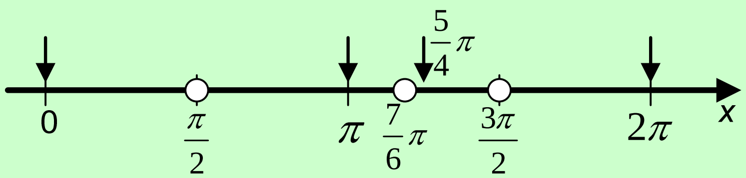
Når $x \in [0, 2\pi\rangle$, er $\sin x > \cos x$ når $x \in \underline{\underline{\langle\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi\rangle}}$. Se figuren nedenfor.



b) $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$

Fra Eksempel 5.1b vet vi at den tilhørende likningen har løsningsmengden $\underline{\left(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{7}{6}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right)}$.

Dette gir tall-linja nedenfor:



$x = 0$: Her er $2\cos 0 + 2\sqrt{3}\cos^2 0 = 2\cdot 1 + 2\sqrt{3}\cdot 1^2 = \underline{2+2\sqrt{3}}$, mens $\sin(2\cdot 0) = \underline{0}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[0, \tfrac{1}{2}\pi\right\rangle$.

$x = \pi$: Her er $2\cos\pi + 2\sqrt{3}\cos^2\pi = 2\cdot(-1) + 2\sqrt{3}\cdot(-1)^2 = \underline{2\left(\sqrt{3}-1\right)} > 0$, mens $\sin(2\cdot\pi) = \underline{0}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{7}{6}\pi\right\rangle$.

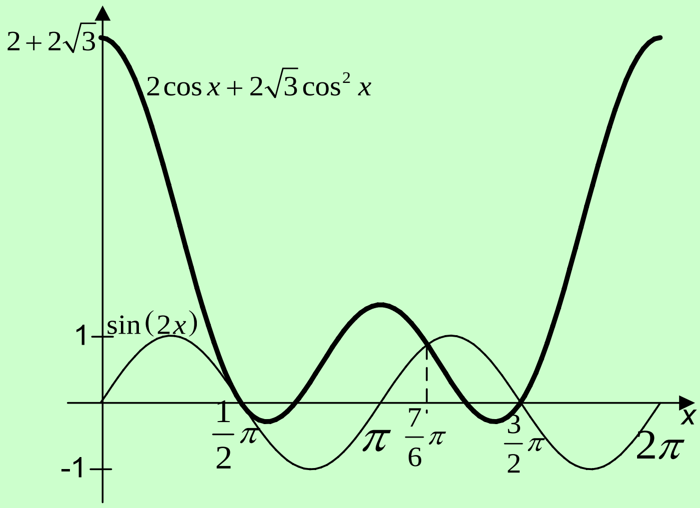
$x = \tfrac{5}{4}\pi$: Her er $2\cos\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) + 2\sqrt{3}\cos^2\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) = 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 \approx \underline{0.32}$, mens $\sin\left(2\cdot\tfrac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(\tfrac{5}{2}\pi\right) = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \underline{1}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x < \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[\tfrac{7}{6}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\right\rangle$.

$x = 2\pi$: Her er $2\cos(2\pi) + 2\sqrt{3}\cos^2(2\pi) = 2\cdot 1 + 2\sqrt{3}\cdot 1^2 = \underline{2+2\sqrt{3}} > 0$, mens $\sin(2\cdot 2\pi) = \underline{0}$. Da vet vi at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ i hele intervallet $\left[\tfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle$.

Vi summerer opp: Når $x \in [0, 2\pi\rangle$, er

$$2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x) \text{ når } \underline{\underline{x \in \left\langle 0, \tfrac{1}{2}\pi\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{7}{6}\pi\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right\rangle}}.$$

Merk at $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x = \sin(2x)$ når $x = \tfrac{1}{2}\pi$, mens $2\cos x + 2\sqrt{3}\cos^2 x > \sin(2x)$ på begge sider av $x = \tfrac{1}{2}\pi$. Se figuren nedenfor.



Oppgave 5.2.