2. Trekantberegning.

I det innledende notatet om trigonometri konsentrerte vi oss om rettvinklede trekanter. Men de fleste trekanter vi kommer bort i i praksis, er ikke rettvinklet. Vi skal nå se på setninger som brukes i slike situasjoner.

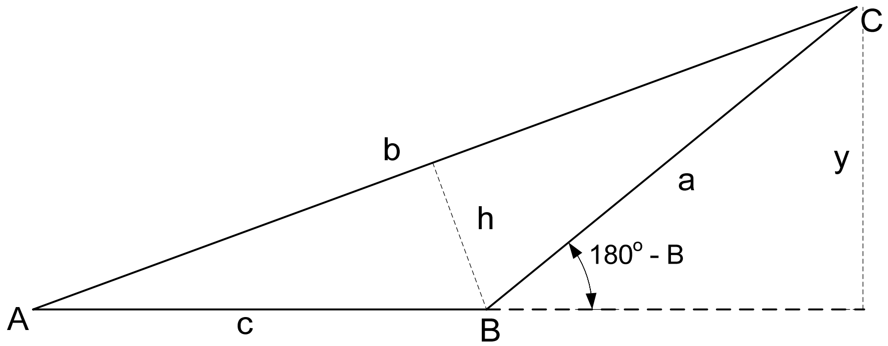
2.1. Sinusproporsjonen.

Den første setningen kalles ***sinusproporsjonen*** eller ***sinussetningen***:

La *A, B* og *C* være hjørner i en vilkårlig trekant. La *a, b* og *c* være hjørnenes motstående sider. Da er:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Setningen bevises ved hjelp av figuren nedenfor, der hjelpelinja *h* står vinkelrett på *AC* mens hjelpelinja *y* står vinkelrett på forlengelsen av *AB*. Merk at to av vinklene er mindre enn 90°, mens den tredje er større enn 90°.



Vi starter med å merke oss at

$$\sin A = \frac{h}{c} \quad \Leftrightarrow \quad h = c \sin A$$

og at

$$\sin C = \frac{h}{a} \quad \Leftrightarrow \quad h = a \sin C.$$

Vi setter disse to uttrykkene for *h* lik hverandre, og får

$$c \sin A = a \sin C \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}}.$$

Videre ser vi at

$$\sin A = \frac{y}{b} \quad \Leftrightarrow \quad y = b \sin A$$

og at

$$\sin(180^\circ - B) = \frac{y}{a} \quad \Leftrightarrow \quad y = a \sin(180^\circ - B) = a \sin B.$$

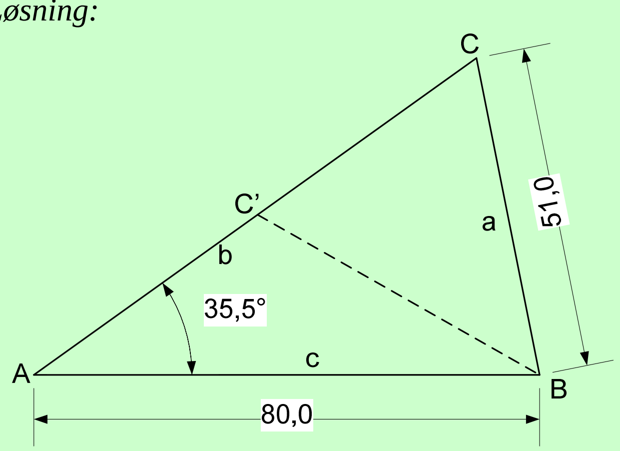
Vi setter disse to uttrykkene for *y* lik hverandre, og får

$$b\sin A = a\sin B \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}}.$$

Ved å sette disse to resultatene sammen, får vi sinusproporsjonen. Merk at setningen gjelder uavhengig av om vinklene er større enn eller mindre enn 90°.

Eksempel 2.1: Finn siden *b* og de ukjente vinklene i en trekant der du vet at siden $a = 51.0\,\text{cm}$, siden $c = 80.0\,\text{cm}$, og vinkel $A = 35.5^\circ$.

Løsning:



Trekanten er tegnet til venstre. Vi bruker sinusproporsjonen til å finne vinkel *C*:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \sin A \cdot \frac{c}{a} = \sin 35.5^\circ \cdot \frac{80.0}{51.0}$$

$$= \underline{0.911}$$

Men vi vet at det er to vinkler mellom 0° og 180° som har sinusverdien 0.911. Dersom vi velger den vinkelen som er mindre enn 90° (og som kalkulatoren gir ut) blir

$$\angle C = \underline{\underline{65.6^\circ}}.$$

Da blir

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 35.5^\circ - 65.6^\circ = \underline{\underline{78.9^\circ}}.$$

Bruker igjen sinusproporsjonen til å finne *b*:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A} = (51.0\,\text{cm}) \cdot \frac{\sin 78.9^\circ}{\sin 35.5^\circ} = \underline{\underline{86.2\,\text{cm}}}.$$

Den andre vinkelen som har sinusverdien 0.911, er

$$\angle C' = 180^\circ - 65.6^\circ = \underline{\underline{114.4^\circ}}.$$

Som du ser av figuren, gir også denne vinkelen en løsning som tilfredsstiller kravene i oppgaveteksten (se den stiplede linja BC'). Dersom vi velger hjørnet C' istedenfor C, blir

$$\angle B' = 180^\circ - \angle A - \angle C' = 180^\circ - 35.5^\circ - 114.4^\circ = \underline{\underline{30.1^\circ}}.$$

Bruker igjen sinusproporsjonen til å finne *b'*:

$$\frac{\sin B'}{b'} = \frac{\sin A}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b' = a \cdot \frac{\sin B'}{\sin A} = (51.0\,\text{cm}) \cdot \frac{\sin 30.1^\circ}{\sin 35.5^\circ} = \underline{\underline{44.0\,\text{cm}}}.$$

Den tvetydigheten som framkommer i eksemplet ovenfor, vil vi alltid støte på når vi bruker sinusproporsjonen til å finne en vinkel. Vi må derfor alltid støtte oss til en god figur for å avgjøre om begge løsningene kan brukes.

Oppgave 2.1.

Som du har sett av eksempel 2.1 og oppgave 2.1, kan vi få to løsninger når vi bruker sinus-setningen. I en del tilfeller kan det være vanskelig å avgjøre om vi kan bruke begge løsningene, eller om vi bare kan bruke den ene. Noen ganger kan det være nødvendig å kontrollere med andre metoder. Da er setningen nedenfor uunnværlig. Setningen brukes også i mange situasjoner der sinus-setningen ikke kan brukes.

2.2. Cosinus-setningen.

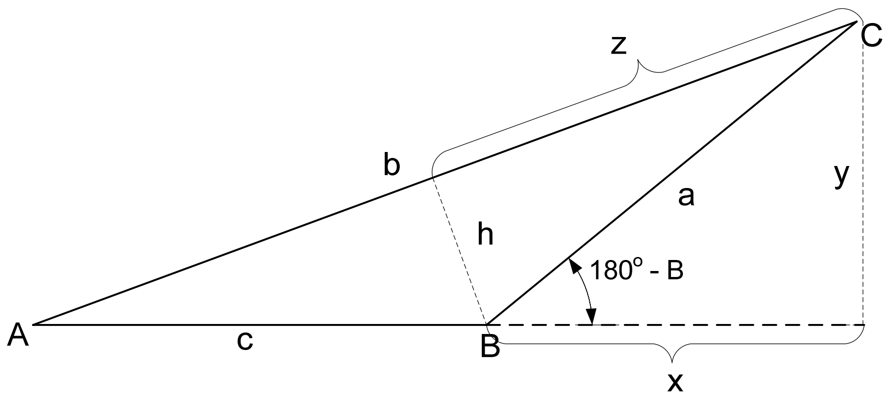
Den neste setningen kalles ***cosinus-setningen*** eller ***utvidet Pytagoras***:

La A, B og C være hjørner i en vilkårlig trekant. La a, b og c være hjørnenes motstående sider. Da er:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Merk at alle versjonene av setningen starter med kvadratet av en side og slutter med cosinus til sidens motstående vinkel. Dette er en grei huskeregel.

Vi skal utlede setningene ved hjelp av samme figur som ovenfor, der to av vinklene er mindre enn 90°, mens den tredje er større enn 90°.



Ved hjelp av Pytagoras får vi at

$$\begin{aligned} b^2 &= (c+x)^2 + y^2 = \left(c^2 + 2cx + x^2\right) + y^2 = c^2 + 2cx + \left(x^2 + y^2\right) \\ &= c^2 + 2cx + a^2 = c^2 + 2c\left(a\cos\left(180^\circ - B\right)\right) + a^2 \\ &= c^2 + 2ca(-\cos B) + a^2 = \underline{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} \end{aligned}$$

Under veis har vi benyttet at

$$\cos\left(180^\circ - B\right) = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x = a\cos\left(180^\circ - B\right) = a\left(-\cos B\right).$$

Vi ser altså at setningen stemmer når vinkelen er større enn 90°. Nå skal vi vise at setningen også stemmer for en vinkel som er mindre enn 90°. På ny benytter vi Pytagoras, og setter opp:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b-z)^2 = h^2 + \left(b^2 - 2bz + z^2\right) = \left(h^2 + z^2\right) + b^2 - 2bz \\ &= a^2 + b^2 - 2bz = a^2 + b^2 - 2b\left(a\cos C\right) = \underline{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} \end{aligned}$$

Setningen stemmer altså også for en vinkel som er mindre enn 90°.

Den siste versjonen av setningen er følger direkte ved å bytte om bokstavene på hjørnene A og C, og på sidene *a* og *c*.

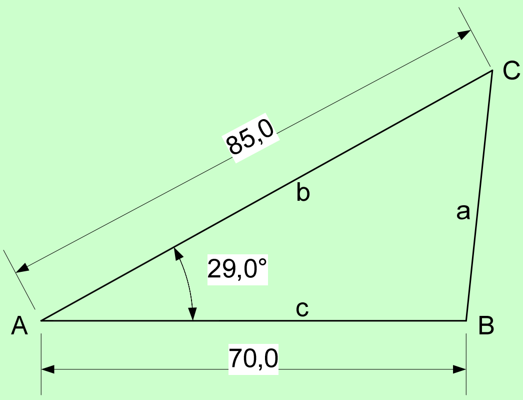
Eksempel 2.2: Bestem de sider og vinkler som ikke er kjent i disse trekantene:

a) Siden $c = 70.0\,\text{cm}$, siden $b = 85.0\,\text{cm}$, og $\angle A = 29.0^\circ$.

b) Siden $a = 46.6\,\text{cm}$, siden $b = 63.6\,\text{cm}$ og siden $c = 57.0\,\text{cm}$

Løsning:

a)



Vi finner siden *a* ved hjelp av cosinus-setningen:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos \\ &= 85.0^2 + 70.0^2 - 2\cdot 85.0\cdot 70\cdot\cos\left(29^\circ\right) \\ &= \underline{1717} \end{aligned}$$

Da er

$$a = \sqrt{1717} = \underline{\underline{41.4}}$$

Nå er det fristende å finne en av de ukjente vinklene med sinusproporsjonen. Men da støter vi på den tvetydigheten som vi så i forrige eksempel. Vi bruker heller cosinus-setningen selv om den gir litt mer regning:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \quad \Leftrightarrow \quad 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1717 + 70.0^2 - 85.0^2}{2\cdot 41.4\cdot 70.0} = \underline{-0.105}$$

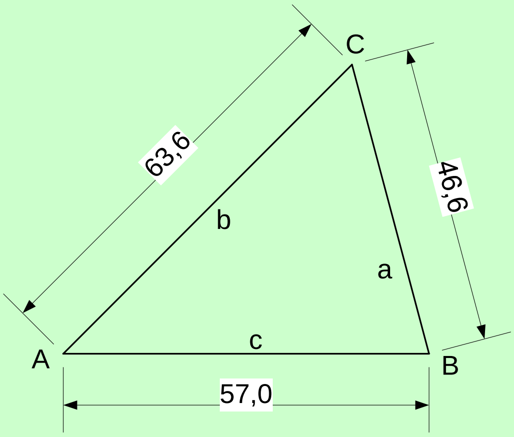
Da blir

$$\angle B = \underline{\underline{96.0^\circ}}$$

og

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 29.0^\circ - 96.0^\circ = \underline{\underline{55.0^\circ}}.$$

b)



Her benytter vi bare cosinus-setningen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{46.6^2 + 57.0^2 - 63.6^2}{2 \cdot 46.6 \cdot 57.0} = \underline{0.259}$$

Da blir

$$\angle B = \underline{\underline{75.0^\circ}}.$$

Vi motstår fremdeles fristelsen til å bruke den enklere sinusproporsjonen, og benytter heller den sikrere cosinus-setningen til å finne $\angle A$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Leftrightarrow \quad 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{63.6^2 + 57.0^2 - 46.6^2}{2 \cdot 63.6 \cdot 57.0} = \underline{0.7065}$$

Da er

$$\angle A = \underline{\underline{45.0^\circ}}.$$

Til slutt blir

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 45.0^\circ - 75.0^\circ = \underline{\underline{60^\circ}}$$

Oppgave 2.2.

2.3. Arealsetningen.

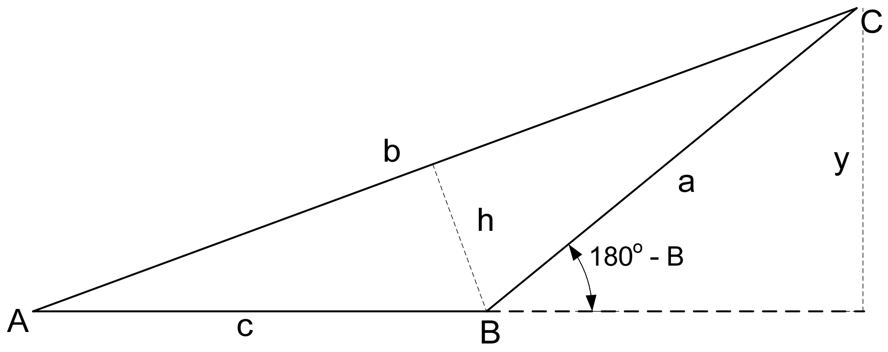
Vi avslutter med en setning som er svært nyttig ved arealberegning.

La A, B og C være hjørner i en vilkårlig trekant. La a, b og c være hjørnenes motstående sider. Da kan trekantens areal F beregnes slik:

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin C = \tfrac{1}{2}bc\sin A = \tfrac{1}{2}ac\sin B.$$

Merk at i alle versjonene er arealet lik halvparten av produktet av to sider, multiplisert med sinus til sidenes mellomliggende vinkel.

Vi beviser setningen med samme figur som før, og tar med bevis for en vinkel som er mindre enn 90° og en vinkel som er større enn 90°.



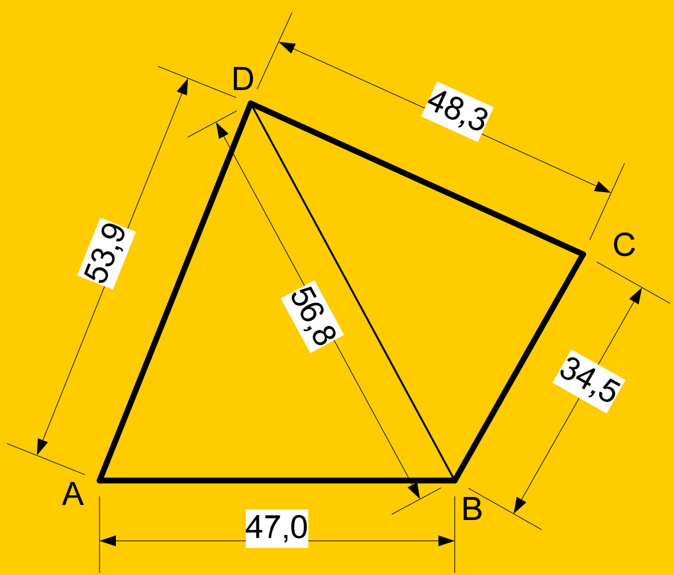
Vi ser at arealet blir

$$F = \tfrac{1}{2}c \cdot y = \tfrac{1}{2}c \cdot a\sin\left(180^\circ - B\right) = \underline{\tfrac{1}{2}c \cdot a\sin B}$$

eller at arealet blir

$$F = \tfrac{1}{2}b \cdot h = \underline{\tfrac{1}{2}b \cdot c\sin A}.$$

Eksempel 2.3: En firkantet tomt *ABCD* har de dimensjonene som er vist på figuren nedenfor. Finn arealet av tomta.



Løsning: Vi starter med å finne $\angle A$:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A = AB^2 + AD^2 - BD^2$$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \frac{47.0^2 + 53.9^2 - 56.8^2}{2 \cdot 47.0 \cdot 53.9} = \underline{0.3726}$$

Da er

$$\angle A = \underline{68.1^\circ}$$

slik at arealet av $\triangle ABD$ blir

$$F_{ABD} = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A = \tfrac{1}{2} \cdot 47.0 \cdot 53.9 \cdot \sin\left(68.1^\circ\right) = \underline{1175}.$$

Så finner vi $\angle C$ på samme måte:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos C \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos C = BC^2 + CD^2 - BD^2$$

$$\cos C = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot CD} = \frac{34.5^2 + 48.3^2 - 56.8^2}{2 \cdot 34.5 \cdot 48.3} = \underline{0.089}$$

Da er

$$\angle C = \underline{84.9^\circ}$$

slik at arealet av $\triangle ABD$ blir

$$F_{BCD} = \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin C = \tfrac{1}{2} \cdot 34.5 \cdot 48.3 \cdot \sin\left(84.9^\circ\right) = \underline{830}.$$

Samlet areal blir da

$$1175\,\mathrm{m}^2 + 830\,\mathrm{m}^2 = \underline{\underline{2005\,\mathrm{m}^2}}.$$

Oppgave 2.3.

Hittil har vi holdt oss til *plane* trekanter og firkanter. Det blir mye mer spennende (d.v.s. vanskelig) dersom trekantene befinner seg på en *kuleflate*. D må vi ty til *sfærisk trigonometri*, som danner grunnlaget for all navigasjon.