3. Trigonometriske identiteter.

3.1. Innledning.

Vi har allerede sett på og bevist noen viktige sammenhenger mellom trigonometriske størrelser, for eksempel:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Slike sammenhenger kalles ofte *trigonometriske formler*. Det er imidlertid mer korrekt å kalle dem ***trigonometriske identiteter***, fordi de er utsagn som er sanne for alle verdier av den eller de fri variable som inngår.

For oversiktens skyld skal jeg også gjenta noen flere slike identiteter som vi har satt opp før, dels ved å se på rettvinklede trekanter, og dels ved hjelp av enhetssirkelen:

$$\sin(-v) = -\sin v \qquad \cos(-v) = \cos v \qquad \tan(-v) = -\tan v$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - v\right) = \cos v \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - v\right) = \sin v \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - v\right) = \frac{1}{\tan v}$$

$$\sin(\pi - v) = \sin v \qquad \cos(\pi - v) = -\cos v \qquad \tan(\pi - v) = -\tan v$$

I dette notatet skal vi starte med å bevise identitetene for sinus og cosinus til en sum og en differens av to vinkler, og vise noen anvendelser av disse identitetene. Deretter skal vi se på noen andre identiteter som kan utledes på grunnlag av disse.

3.2. Sinus, cosinus og tangens til sum og differens av to vinkler.

Vi har tidligere satt opp identitetene for sinus og cosinus til en sum av to vinkler:

$$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

Disse to identitetene danner grunnlaget for en mengde andre identiteter. Vi skal se på de viktigste av disse etter hvert. Den første vi skal se på, er de tilsvarende identitetene for en differens mellom to vinkler:

$$\begin{aligned}\sin(u - v) &= \sin u \cdot \cos(-v) + \cos u \cdot \sin(-v)\\ &= \underline{\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v}\\ \cos(u - v) &= \cos u \cdot \cos(-v) - \sin u \cdot \sin(-v)\\ &= \underline{\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v}\end{aligned}$$

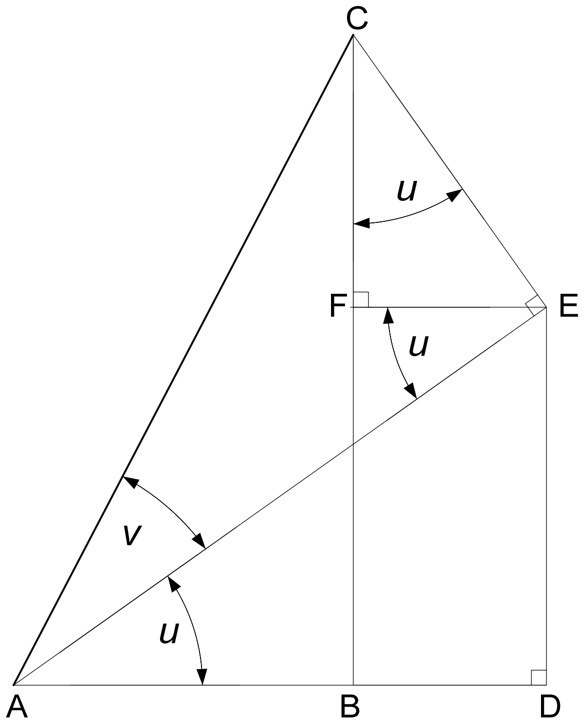
Men først må vi bevise identitetene for sinus og cosinus til en sum av to vinkler. Jeg skal gi et geometrisk bevis og et bevis basert på en identitet for komplekse tall. Hopp over dette siste beviset dersom du ikke har vært borti komplekse tall.

3.2.1. Geometrisk bevis.

Det vanligste er nok å bevise disse identitetene geometrisk. Det fins flere slike bevis, men jeg kjenner ingen *enkle* geometriske bevis. Det beviset som jeg skal gjennomføre, er nok det minst arbeidskrevende, selv om det krever litt "triksing".

I figuren nedenfor er to vinkler u og v tegnet inn. Videre er linjene DE og BC vinkelrett på AD, og EF står vinklerett på DE og BC. Dermed finner vi igjen vinkel v tre steder i figuren.

Så setter vi i gang:



$$\begin{aligned}\sin(u+v) &= \frac{BC}{AC} = \frac{BF+FC}{AC} \\ &= \frac{BF}{AC} + \frac{FC}{AC} \\ &= \frac{DE}{AC} + \frac{FC}{AC} \\ &= \frac{DE}{AE}\cdot\frac{AE}{AC} + \frac{FC}{CE}\cdot\frac{CE}{AC} \\ &= \underline{\sin u\cdot\cos v + \cos u\cdot\sin v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(u+v) &= \frac{AB}{AC} = \frac{AD-BD}{AC} \\ &= \frac{AD}{AC} - \frac{BD}{AC} \\ &= \frac{AD}{AC} - \frac{EF}{AC} \\ &= \frac{AD}{AE}\cdot\frac{AE}{AC} - \frac{EF}{CE}\cdot\frac{CE}{AC} \\ &= \underline{\cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v}\end{aligned}$$

3.2.2. Bevis med identiteter for komplekse tall.

Dersom du har vært borti komplekse tall, vil du vite at

$$e^{iu} = \cos u + i\sin u\,, \qquad e^{iv} = \cos v + i\sin v\,.$$

På samme måte er

$$e^{i(u+v)} = \cos(u+v) + i\sin(u+v) \tag{1}$$

Men

$$\begin{aligned} e^{i(u+v)} &= e^{iu+iv} = e^{iu}\cdot e^{iv} = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v) \\ &= \cos u\cdot\cos v + \cos u\cdot i\sin v + i\sin u\cdot\cos v + i\sin u\cdot i\sin v \qquad (2) \\ &= \cos u\cdot\cos v - \sin u\cdot\sin v + i(\cos u\cdot\sin v + \sin u\cdot\cos v)\end{aligned}$$

Her må realdelen av (1) være lik realdelen av (2), og imaginærdelen av (1) må være lik imaginærdelen av (2). Herav følger de to identitetene vi ønsker å bevise.

3.2.3. Tangens til sum og differens av to vinkler.

Nå som vi har identiteter for sinus og cosinus til en sum og en differens av to vinkler, kan vi også sette opp identiteter for tangens til sum og differens av to vinkler:

$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\cdot\tan v}$$
$$\tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\cdot\tan v}$$

Disse identitetene utledes slik:

$$\tan(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cdot\cos v+\cos u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v}\cdot\frac{\frac{1}{\cos u\cdot\cos v}}{\frac{1}{\cos u\cdot\cos v}}$$
$$=\frac{\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v}}{1-\frac{\sin u\cdot\sin v}{\cos u\cdot\cos v}}=\underline{\underline{\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\cdot\tan v}}}$$

$$\tan(u-v)=\frac{\tan u+\tan(-v)}{1-\tan u\cdot\tan(-v)}=\underline{\underline{\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\cdot\tan v}}}.$$

3.2.4. Noen anvendelser.

Identitetene for $\sin\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$ og $\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$ har vi kun satt opp med utgangspunkt i en rettvinklet trekant, og strengt tatt er de foreløpig kun gyldige for vinkler mellom 0° og 90°. Vi skal nå vise at de gjelder allment:

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-v\right)=\sin\tfrac{\pi}{2}\cdot\cos v-\cos\tfrac{\pi}{2}\cdot\sin v=1\cdot\cos v-0\cdot\sin v=\underline{\cos v}.$$
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-v\right)=\cos\tfrac{\pi}{2}\cdot\cos v+\sin\tfrac{\pi}{2}\cdot\sin v=0\cdot\cos v+1\cdot\sin v=\underline{\sin v}.$$

Vi kan også finne eksakte verdier for sinus, cosinus og tangens for visse vinkler, slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 3.1: Finn eksakte verdier for sinus, cosinus og tangens til 75°.

Løsning: Benytter at $75^\circ=45^\circ+30^\circ$, og får:

$$\sin 75^\circ=\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}}$$

$$\cos 75^\circ=\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\underline{\underline{\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}}$$

$$\tan\left(75^\circ\right) = \tan\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - 1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{9 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2}{9 - \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{6}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\cancel{6}} = \underline{\underline{2 + \sqrt{3}}}$$

Eller:

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6 + 2\sqrt{12} + 2}{6 - 2} = \frac{8 + 2\sqrt{4\cdot 3}}{4}$$

$$= \frac{8 + 2\cdot 2\sqrt{3}}{4} = \frac{\cancel{4}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}} = \underline{\underline{2+\sqrt{3}}}$$

Oppgave 3.1.

Noen av de viktigste anvendelsene av formlene for sinus og cosinus til en sum og en differens av to vinkler, finner vi når vi skal omforme uttrykk av formen

$$f(x) = S\cdot\sin(\omega x) + C\cdot\cos(\omega x)$$

til formen

$$f(x) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$$

eller

$$f(x) = A\cdot\cos(\omega t + \varphi).$$

Slike omforminger og nytten av dem er omtalt i et eget notat.

3.3. Identiteter for doble vinkler.

Vi har i et tidligere notat satt opp identiteter for sinus og cosinus til doble vinkler. Vi gjentar dem her, og kompletterer med tangens til den doble vinkelen:

$$\sin(2v) = 2\sin v\cdot\cos v.$$

$$\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v = 1 - 2\sin^2 v = 2\cos^2 v - 1.$$

$$\tan(2v) = \frac{2\tan v}{1 - \tan^2 v}.$$

Vi får disse identitetene ved å sette inn $u = v$ i identitetene for sinus, cosinus og tangens til $u + v$:

$$\sin(2v) = \sin(v+v) = \sin v \cdot \cos v + \cos v \cdot \sin v = \underline{\underline{2\sin v \cdot \cos v}}\,.$$

$$\cos(2v) = \cos(v+v) = \cos v \cdot \cos v - \sin v \cdot \sin v = \underline{\underline{\cos^2 v - \sin^2 v}}$$

$$= \begin{cases} (1-\sin^2 v) - \sin^2 v = \underline{\underline{1-2\sin^2 v}} \\ \cos^2 v - (1-\cos^2 v) = \underline{\underline{2\cos^2 v - 1}} \end{cases}$$

$$\tan(2v) = \tan(v+v) = \frac{\tan v + \tan v}{1 - \tan v \cdot \tan v} = \underline{\underline{\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}}}\,.$$

Noen ganger har vi bruk for sinus, cosinus og tangens til $3v$. Det skaffer vi oss på samme måte:

$$\begin{aligned} \sin(3v) &= \sin(2v+v) = \sin(2v)\cdot\cos v + \cos(2v)\cdot\sin v \\ &= (2\sin v \cdot \cos v)\cdot \cos v + (\cos^2 v - \sin^2 v)\cdot \sin v \\ &= 2\sin v \cdot \cos^2 v + \cos^2 v \cdot \sin v - \sin^3 v \\ &= \underline{\underline{3\sin v \cdot \cos^2 v - \sin^3 v}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(3v) &= \cos(2v+v) = \cos(2v)\cdot\cos v - \sin(2v)\cdot\sin v \\ &= (\cos^2 v - \sin^2 v)\cdot\cos v - (2\sin v\cdot\cos v)\cdot\sin v \\ &= \cos^3 v - \sin^2 v \cdot \cos v - 2\sin^2 v \cdot \cos v \\ &= \underline{\underline{\cos^3 v - 3\sin^2 v \cdot \cos v}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(3v) &= \tan(2v+v) = \frac{\tan(2v) + \tan v}{1 - \tan(2v)\cdot\tan v} = \frac{\frac{2\tan v}{1-\tan^2 v} + \tan v}{1 - \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v}\cdot \tan v}\cdot\frac{1-\tan^2 v}{1-\tan^2 v} \\ &= \frac{2\tan v + \tan v - \tan^3 v}{1 - \tan^2 v - 2\tan^2 v} = \underline{\underline{\frac{3\tan v - \tan^3 v}{1 - 3\tan^2 v}}} \end{aligned}$$

Alle disse identitetene kan omformes på forskjellige måter.

Det er ikke meningen at du skal gå rundt å huske disse identitetene. Men det er greit at du vet at de eksisterer, og enda mer greit om du kan utlede dem selv ved behov.

Eksempel 3.2: Løs likningen

$$\cos(2x) + 3\cos x = 1, \qquad x \in [0, 2\pi\rangle\,.$$

Løsning: Vi benytter at

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1,$$

og omformer likningen slik:

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\cos x)^2 + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{-3\pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \underline{-2} \end{cases}$$

Løsningen $\cos x = -2$ kan selvsagt ikke brukes. Men løsningen $\cos x = \frac{1}{2}$ gir de to vinklene

$$x = \underline{\underline{\tfrac{\pi}{3}}}$$

og

$$x = 2\pi - \tfrac{\pi}{3} = \underline{\underline{\tfrac{5}{3}\pi}}.$$

Du finner flere slike eksempler og oppgaver i et eget notat om trigonometriske likninger og ulikheter.

3.4. Sinus og cosinus til halve vinkler.

Når du kjenner cosinus til en vinkel, kan du finne sinus, cosinus og tangens til den halve vinkelen ved hjelp av disse formlene:

$$\sin\left(\tfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$$

$$\cos\left(\tfrac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\tan\left(\tfrac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$

Vi utleder disse identitetene ved å ta utgangspunkt i identiteter for $\cos(2v)$, og setter $v = \frac{u}{2}$:

$$\cos(2v) = 1 - 2\sin^2 v \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(2\cdot\tfrac{u}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{u}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin^2\left(\tfrac{u}{2}\right) = 1 - \cos u \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(\tfrac{u}{2}\right) = \underline{\underline{\pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}}}$$

$$\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(2\cdot\tfrac{u}{2}\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) - 1$$

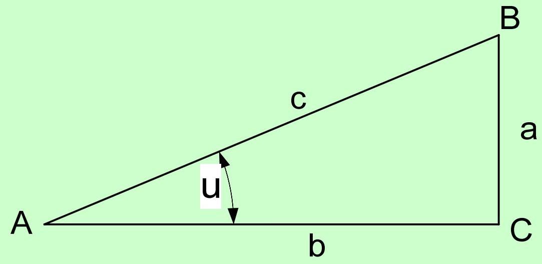
$$\Leftrightarrow\quad 2\cos^2\left(\tfrac{u}{2}\right) = 1 + \cos u \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{u}{2}\right) = \underline{\underline{\pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}}}$$

$$\tan\left(\tfrac{u}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}}}$$

Eksemplet nedenfor er hentet fra et problem med å beregne kvadratrota av et komplekst tall. Men du trenger ikke å vite noe om komplekse tall for å følge eksemplet.

Eksempel 3.2: Du vet at tangens til en vinkel i området $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ er $\frac{5}{12}$. Finn eksakte verdier for sinus og cosinus til den halve vinkelen.

Løsning:



Må først finne $\cos u$ når jeg vet at

$$\tan u = \tfrac{a}{b} = \tfrac{5}{12}.$$

Bruker da figuren til venstre, og velger enheter slik at $a = 5$ og $b = 12$. Da er

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \sqrt{169} = \underline{13}.$$

Da blir

$$\cos u = \frac{b}{c} = \underline{\frac{12}{13}}.$$

Nå er det bare å sette inn i formlene:

$$\sin\left(\tfrac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{26}}}}.$$

$$\cos\left(\tfrac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{25}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{26}}}}.$$

Oppgave 3.2.

3.5. Produkt av sinus og cosinus.

Noen ganger dukker det opp produkt av sinus- og cosinusfunksjoner der vi helst skulle hatt summer eller differanser. Da kan vi bruke disse identitetene:

$$\sin u \cdot \cos v = \tfrac{1}{2}\left(\sin(u-v) + \sin(u+v)\right)$$
$$\cos u \cdot \cos v = \tfrac{1}{2}\left(\cos(u-v) + \cos(u+v)\right)$$
$$\sin u \cdot \sin v = \tfrac{1}{2}\left(\cos(u-v) - \cos(u+v)\right)$$

Disse identitetene utledes slik:

$$\sin(u-v) + \sin(u+v) = (\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v) + (\sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v)$$
$$= 2\sin u \cdot \cos v$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin u \cdot \cos v = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\left(\sin(u-v) + \sin(u+v)\right)}}$$

$$\cos(u-v)+\cos(u+v)=(\cos u\cdot\cos v+\sin u\cdot\sin v)+(\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v)$$
$$=2\cos u\cdot\cos v$$
$$\Leftrightarrow\quad \cos u\cdot\cos v=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}(\cos(u-v)+\cos(u+v))}}$$

$$\cos(u-v)-\cos(u+v)=(\cos u\cdot\cos v+\sin u\cdot\sin v)-(\cos u\cdot\cos v-\sin u\cdot\sin v)$$
$$=2\sin u\cdot\sin v$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin u\cdot\sin v=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}(\cos(u-v)-\cos(u+v))}}$$

Disse identitetene kan komme til nytte når vi integrerer, slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 3.3: Bestem

$$\int \sin(3x)\cdot\cos(2x)\,dx\,.$$

Løsning: Vi benytter den første identiteten i ramma, og får:

$$\int \sin(3x)\cdot\cos(2x)\,dx=\int \tfrac{1}{2}(\sin(3x-2x)+\sin(3x+2x))\,dx$$
$$=\tfrac{1}{2}\int (\sin x+\sin(5x))\,dx$$
$$=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\left(-\cos x-\tfrac{1}{5}\cos(5x)\right)}}$$

[Oppgave 3.3.]