4. Generelle sinus- og cosinusfunksjoner.

4.1. Noen innledende merknader.

Vi har tidligere nevnt at sinus, cosinus og tangens egentlig er *funksjoner*, og har tegnet grafene til disse funksjonene. Vi skal nå se nærmere på sinus- og cosinus-funksjonene. I den forbindelse får vi mye bruk for identitetene for sinus og cosinus til en sum og en differens av to vinkler:

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$$
$$\cos(u \pm v) = \cos u \cdot \cos v \mp \sin u \cdot \sin v$$

Disse identitetene er utledet i et eget notat om trigonometriske identiteter. Legg merke til fortegnene på leddene.

Det er ikke nødvendig å behandle *både* sinus- og cosinus-funksjoner. Vi kan lett gå over fra sinus til cosinus eller omvendt ved hjelp av disse identitetene:

$$\cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad \sin x = \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Vi kan få disse identitetene på flere måter, for eksempel slik:

$$\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos x \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \underline{\cos x}\,.$$

$$\cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \sin x \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \underline{\sin x}\,.$$

I dette notatet skal jeg stort sett omtale sinus-funksjoner. De fleste konklusjonene kan direkte overføres til cosinus-funksjoner. Dessuten kan du gå fra cosinus- til sinus-funksjon ved å øke vinkelen med $\tfrac{\pi}{2}$ slik den første identiteten i ramma ovenfor angir.

4.2. Sinus-funksjonen.

I sin mest generelle form ser sinus-funksjonen slik ut:

$$y = f(x) = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)\,.$$

Vi skal nå se på betydningen av konstantene *A*, *k* og φ etter tur.

Amplitudefaktoren A: Vi vet at sinus-funksjonen kan ha verdier i området mellom -1 og +1. Faktoren *A* angir derfor yttergrensene for funksjonsverdiene som funksjonen

$$y = f(x) = A \cdot \sin(k \cdot x + \varphi)$$

kan ha. Det er vanlig å kreve at *A* er et *positivt* tall.

A kalles gjerne ***amplituden*** til sinus-svingningen.

Periode-faktoren k: Vi vet at funksjonen

$$y = f(x) = \sin x$$

er periodisk med periode $P = 2\pi$. Dette betyr at

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x .$$

På tilsvarende måte ser vi at funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x)$$

har periode P hvis og bare hvis

$$k \cdot (x + P) = kx + 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot P = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{P = \frac{2\pi}{k}} .$$

Eksempel 4.1: Bestem perioden til funksjonen

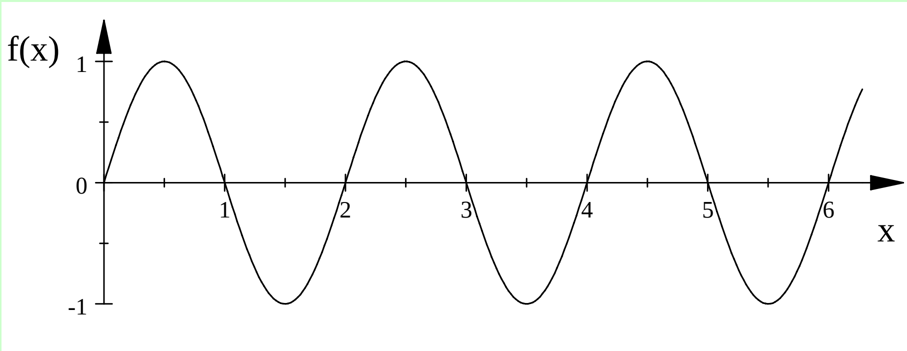
$$y = f(x) = \sin(\pi x),$$

og skisser grafen når $x \in [0, 2\pi]$.

Løsning: I denne funksjonen er $k = \pi$, slik at perioden blir

$$P = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = \underline{\underline{2}} .$$

Grafen blir slik:



Faseforskyvningen φ: Vi vet at funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x)$$

skjærer x-aksen når $x = 0$ (se grafen i eksemplet ovenfor). På tilsvarende måte må funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x + \varphi)$$

skjære x-aksen når

$$k \cdot x + \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -\frac{\varphi}{k}} .$$

Dette innebærer at vi får grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x + \varphi)$$

ved å forskyve grafen til funksjonen

$$y = f(x) = \sin(k \cdot x)$$

i negativ retning slik at den skjærer x-aksen når $x = -\frac{\varphi}{k}$.

Vi kaller derfor φ for ***faseforskyvningen***.

Eksempel 4.2: Skisser grafene til disse funksjonene:

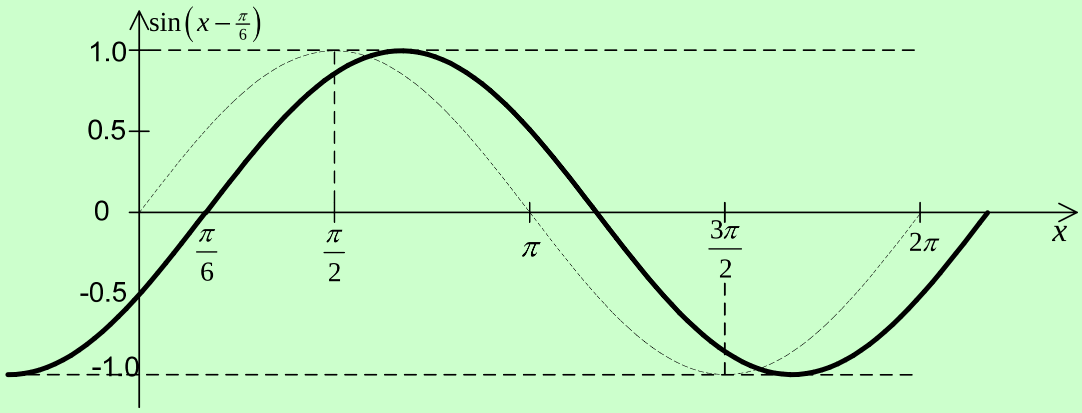
a) $y = f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) $y = f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Løsning:

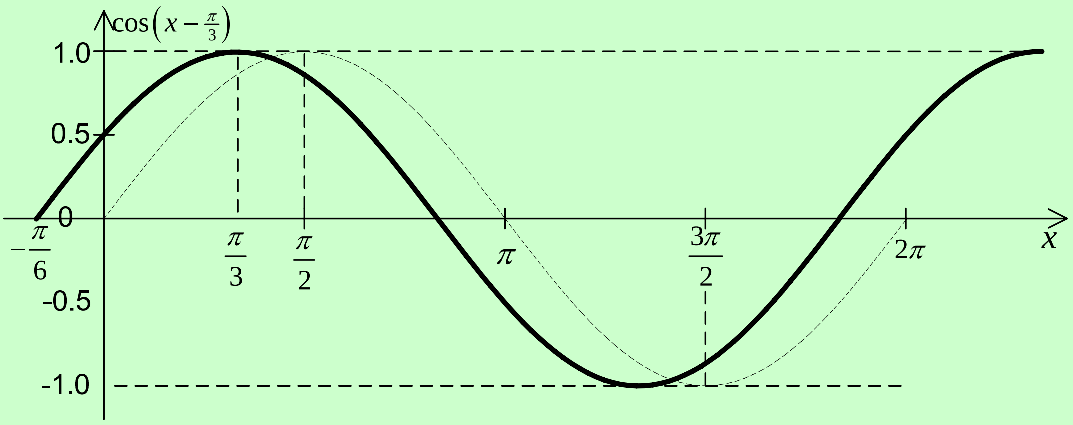
a) Vi skal nå forskyve sinus-grafen en strekning $-\frac{\pi}{6}$ mot venstre, d.v.s. en strekning $\frac{\pi}{6}$ mot høyre. Grafen blir da slik, der den opprinnelige sinus-grafen er tegnet med tynn strek:



b) Benytter at $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Da blir

$$y = f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Dette innebærer at sinus-grafen skal forskyves en strekning $\frac{\pi}{6}$ mot venstre. Vi får da figuren nedenfor, der den opprinnelige sinus-grafen er tegnet med tynn strek:



Du ser at du også kan oppfatte grafen som en cosinus-graf som er forskjøvet en strekning $\frac{\pi}{3}$ mot høyre.

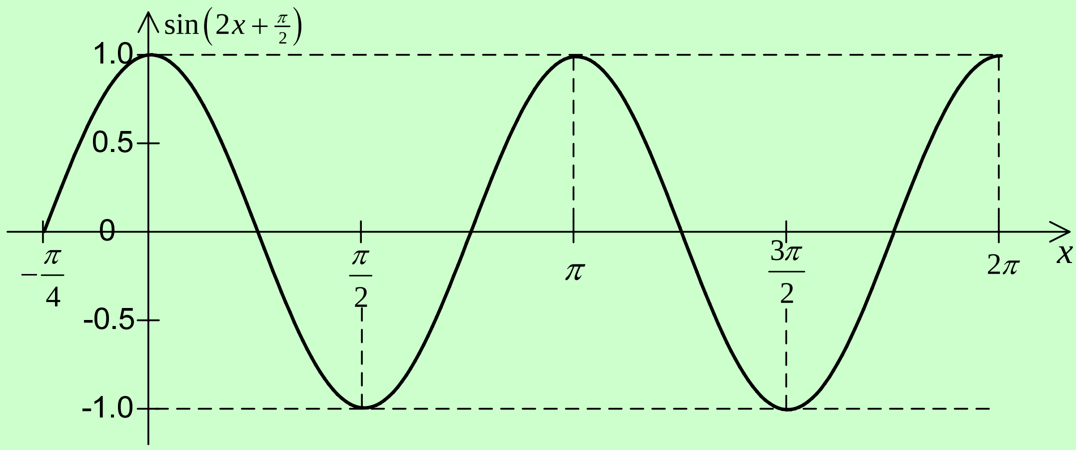
c) Dette gir en sinus-graf som skjærer x-aksen når

$$2x + \tfrac{\pi}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -\tfrac{\pi}{4}}.$$

Funksjonen har også periode

$$P = \tfrac{2\pi}{k} = \tfrac{2\pi}{2} = \underline{\pi}.$$

Dette gir grafen nedenfor:



Du kan også benytte at

$$\sin\left(2x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$$

og slippe å regne ut faseforskyvningen.

Oppsummering:
Du skisserer grafen til

$$y = f(x) = A\sin(k \cdot x + \varphi)$$

slik:

1. Finn et skjæringspunkt med x-aksen ved å sette
$$k \cdot x + \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{\varphi}{k}.$$

2. Finn perioden
$$P = \tfrac{2\pi}{k}.$$

3. Tegn sinusgrafen med amplitude A.

Oppgave 4.1.

4.3. Sum av sinus- og cosinus-funksjon.

Hittil har vi holdt oss til en ren sinus- eller ren cosinus-funksjon. Men vi kommer ofte bort i funksjoner som er en sum av en sinus- og en cosinus-funksjon. Dersom disse funksjonene har samme periode, kan de omformes til en ren sinus- eller ren cosinus-funksjon slik at vi kan benytte de metodene som vi har sett på ovenfor til å tegne grafen. Jeg skal demonstrere teknikken i eksemplet nedenfor.

Eksempel 4.3: Vis at funksjonen

$$y = f(x) = -3\sin x + 4\cos x$$

kan skrives på formen

$$y = f(x) = A\sin(x+\varphi),$$

og finn A og φ.

Løsning: Ved å bruke identiteten for sinus til en sum av to vinkler, får vi at

$$y = A\sin(x+\varphi) = A(\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi)$$

$$= (A\cos\varphi)\sin x + (A\sin\varphi)\cos x$$

Men dette skal være identisk lik

$$y = 3\sin x - 4\cos x .$$

Dette er kun mulig dersom

$$A\cos\varphi = -3$$

og

$$A\sin\varphi = 4 .$$

Vi har nå to likninger med A og φ som ukjente. Vi starter løsningsprosessen med å dele disse likningene på hverandre, og får:

$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{4}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\tan\varphi = -\frac{4}{3}}.$$

Kalkulatoren gir nå ut at

$$\varphi \approx \underline{-0.9273} \text{ (eller } \varphi \approx -53.13^\circ\text{)}.$$

Nå kan det være naturlig å finne A ved å sette denne verdien av φ inn i en av de to likningene for A og φ. Uansett hvilken likning vi bruker, vil vi da få at A blir negativ. Dette strir mot vårt krav om at A skal være et positivt tall.

Dette dilemmaet løser vi ved å gi φ et tillegg på π. Vi vet at dette ikke endrer tangens-verdien. Altså bruker vi

$$\varphi \approx -0.9273 + \pi \approx \underline{2.2143} \text{ (eller } \varphi \approx -53.13^\circ + 180^\circ \approx \underline{126.87^\circ}\text{)}.$$

Og nå finner vi en positiv verdi av A uansett hvilken av de to likningene vi bruker.

Men det fins en bedre metode for å finne A. Vi starter da med å *kvadrere* begge likningene før vi legger dem sammen. Da får vi:

$$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = (-3)^2 + 4^2$$

$$A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 9 + 16$$

$$A^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = 5}$$

Her har vi benyttet at¨

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

og vi har også benyttet at *A* skal være positiv slik at verdien $A = -5$ ikke kan brukes.

Vi samler trådene, og ser at

$$y = f(x) = -3\sin x + 4\cos x \equiv \underline{\underline{5\sin(x + 2.2143)}}.$$

I noen matematiske tabeller kan du finne denne prosedyren oppsummert i to formler:

Når

$$S \cdot \sin x + C \cdot \cos x$$

skal omformes til formen

$$A\sin(x+\varphi),$$

er

$$A = \sqrt{S^2 + C^2}$$

mens

$$\tan\varphi = \frac{C}{S}.$$

Disse formlene er greie til å finne *A*, men du risikerer å finne en vinkel φ som er 180° feil. Derfor vil jeg anbefale at du går gjennom hele prosedyren slik som i eksemplet foran. Det gir litt mer arbeid (men ikke mye når du først behersker teknikken), men du er sikker på å finne rett verdi av φ.

Neste eksempel viser hvordan vi da går fram:

Eksempel 4.4: Skriv funksjonen

$$y = f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

på formen

$$y = f(x) = A\sin(x+\varphi),$$

og bruk resultatet til å tegne grafen til funksjonen.

Løsning: Ved å bruke identiteten for sinus til en sum av to vinkler, får vi at

$$y = A\sin(x+\varphi) = A(\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi)$$

$$= (A\cos\varphi)\sin x + (A\sin\varphi)\cos x$$

Dette er identisk lik

$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

kun dersom

$$A\cos\varphi = 1$$

og

$$A\sin\varphi = \sqrt{3}$$

som gir

$$\frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\varphi = \underline{\sqrt{3}} \quad\Leftrightarrow\quad \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

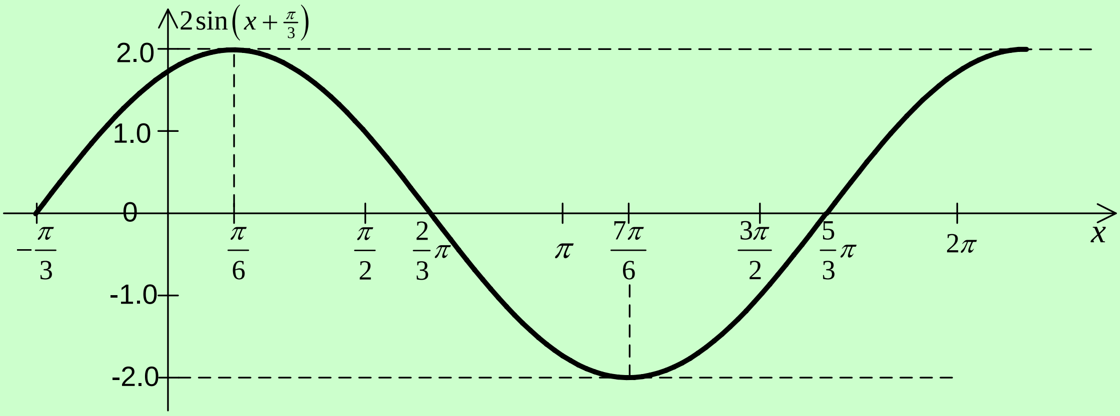
Kun verdien $\varphi = \underline{\frac{\pi}{3}}$ gir positiv *A*.

$$A = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \underline{2}\ .$$

Dermed blir

$$y = f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x \equiv \underline{\underline{2\sin\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right)}}\ .$$

Grafen til denne funksjonen tegnes ved å forskyve en sinus-graf med amplitude 2 en strekning $\varphi = \frac{\pi}{3}$ mot venstre. Grafen er vist nedenfor:



Oppgave 4.2.

De teknikkene som vi har sett på her, kommer til nytte over alt hvor det forekommer svingninger. Spesielt innenfor elektronikk og elektroteknikk er slike funksjoner uunnværlige. Teknikkene anvendes også ved løsing av visse typer trigonometriske likninger og ulikheter.