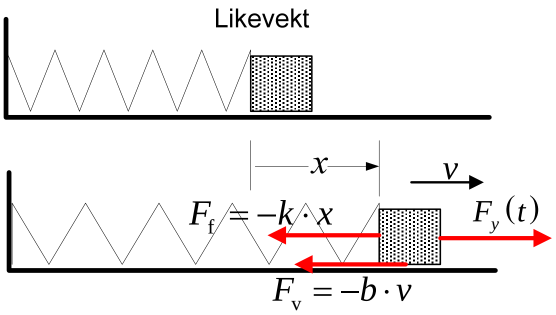
4. Tvungne svingninger.



Vi skal igjen ta utgangspunkt i et kloss-fjær-system, men skal la systemet påvirkes av en ytre kraft $F_y(t)$ i tillegg til fjærkraft og friksjonskraft. Systemet blir da som vist på figuren til venstre.

Så setter vi opp Newtons 2. lov, og benytter at $v = \dfrac{dx}{dt}$ og $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$:

$$F_y(t) - k \cdot x - b \cdot v = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m} \cdot F_y(t).$$

Nå er det mange andre systemer som kan utføre svingninger på samme måte som kloss-fjær-systemet vårt. Vi skal derfor se på en mer generell svingelikning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\,2}x = Y(t).$$

For kloss-fjær-systemet vårt blir $\delta = \dfrac{b}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, og $Y(t) = \dfrac{F_y(t)}{m}$.

Fra teorien for inhomogene lineære differensiallikninger vet vi at slike likninger har løsning av formen

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der $x_h(t)$ er løsningen av den tilhørende homogene likningen (d.v.s. en dempet svingning uten ytre påvirkninger) mens $x_p(t)$ er en partikulær løsning av den inhomogene likningen. Fra våre analyser av dempede svingninger vet vi at utslagene her går mot null fordi de inneholder faktorer og ledd av formen $Ae^{-\delta t}$ der $\delta > 0$, eller $Ae^{\lambda t}$ der $\lambda < 0$. Dette medfører at $x_h(t) \to 0$ slik at $x(t) \to x_p(t)$ når $t \to \infty$. Vi må derfor konsentrere oss om å finne $x_p(t)$, som forteller oss hvordan systemet vil oppføre seg etter at bidraget fra de frie svingningene er dødd bort på grunn av friksjon.

Vi skal begrense oss til å se på *periodiske* ytre påvirkninger. Den enkleste formen for en periodisk påvirkning er

$$Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)$$

(eller tilsvarende sinus-ledd). Dersom du har vært borti Fourier-rekker, vil du vite at *alle* periodiske funksjoner skal skrives som en sum av slike funksjoner, så det er ikke noen stor begrensning at vi kun ser på cosinus- eller sinus-funksjoner.

Selv om du vet hvordan du finner en slik partikulær løsning, er det nokså plundrete å finne den i dette tilfellet. Jeg har derfor ”gjemt” utledningen i et lite tillegg. Jeg har forresten ikke kunnet motstå fristelsen til å skrive et annet lite tillegg der jeg viser hvordan vi på en enklere måte kan finne en partikulær løsning ved å bruke komplekse funksjoner. Dette siste tillegget kan også være en introduksjon til bruk av komplekse størrelser i vekselstrømslæra.

Resultatet av utregningene i tillegget er summert opp nedenfor.

Vi har svingelikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0{}^2x=Y(t)$$

der

$$Y(t)=Y_0\cos(\Omega t).$$

Den partikulære løsningen kan skrives

$$x_p(t)=A\cos(\Omega t+\varphi)$$

der

$$A=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}}$$

og

$$\tan\varphi=-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0{}^2-\Omega^2}.$$

La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

***Eksempel 4.1*:** Vi har et kloss-fjær-system med masse $m=0.20\text{ kg}$, $k=20\text{ N/m}$ og $b=1.0\text{ N/(m/s)}$. Systemet påvirkes av en ytre kraft

$$F(t)=F_0\cos(\Omega t)=(2.0\text{ N})\cos(\Omega t).$$

Hvordan blir svingebevegelsen etter at det er inntrådt stabil tilstand når:

a) $\Omega=5.0\text{ rad/s}$.
b) $\Omega=10\text{ rad/s}$.
c) $\Omega=15\text{ rad/s}$.

Løsning: Med de oppgitte størrelsene finner vi:

$$\delta=\frac{b}{2m}=\frac{1.0\text{ N/(m/s)}}{2\cdot 0.20\text{ kg}}=2.5\text{ s}^{-1}.$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{20\text{ N/m}}{0.20\text{ kg}}}=10\text{ rad/s}.$$

$$Y_0=\frac{F_0}{m}=\frac{2.0\text{ N}}{0.20\text{ kg}}=10\text{ m/s}^2.$$

Fra formlene i ramma ovenfor finner vi at

$$\tan\varphi=-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0{}^2-\Omega^2}=-\frac{2\cdot 2.5\cdot\Omega}{10^2-\Omega^2}=-\frac{5\Omega}{100-\Omega^2}.$$

$$A=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}}=\frac{10}{\sqrt{\left(10^2-\Omega^2\right)^2+4\cdot 2.5^2\cdot\Omega^2}}=\frac{10}{\sqrt{\left(100-\Omega^2\right)^2+25\Omega^2}}.$$

I grafene nedenfor er $Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)$ tegnet med tynn strek, og Y_0 er satt til 0.10 for sammenlikningens skyld. Utslaget $x(t)$ er tegnet med tykk strek.

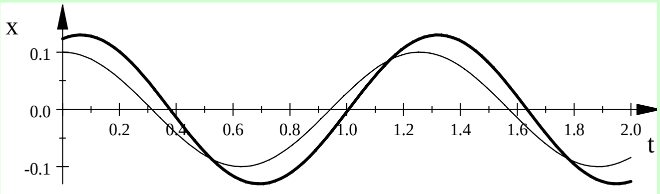
a) Når $\Omega = 5.0$ rad/s , blir

$$\tan\varphi = -\frac{5 \cdot 5.0}{100 - 5.0^2} = -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = -0.32\,.$$

$$A = \frac{10}{\sqrt{\left(100 - 5.0^2\right)^2 + 25 \cdot 5.0^2}} = 0.13\,.$$

Utslaget blir altså

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) = \underline{\underline{0.13\cos(5t - 0.32)}}\,.$$



Vi ser av grafen at utslaget kommer litt etter den ytre kraften, og at største utslag er litt større enn Y_0 .

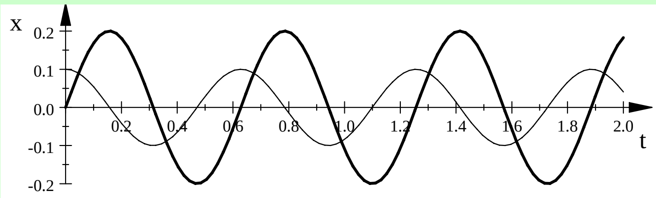
b) Når $\Omega = 10$ rad/s , blir

$$\tan\varphi = -\frac{5 \cdot 10}{100 - 10^2} \to -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \to -\frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{10}{\sqrt{\left(100 - 10^2\right)^2 + 25 \cdot 10^2}} = 0.20\,.$$

Utslaget blir altså

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) = \underline{\underline{0.20\cos\left(10t - \tfrac{1}{2}\pi\right)}}\,.$$



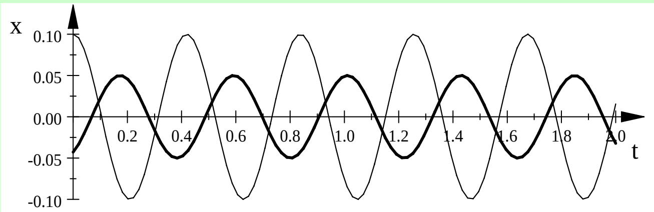
Vi ser av grafen at utslaget kommer klart etter den ytre kraften, og at største utslag er dobbelt så stort som Y_0 .

c) $$\tan\varphi = -\frac{5 \cdot 15}{100 - 15^2} \to \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0.54 - \pi = -2.60\,.$$

$$A = \frac{10}{\sqrt{\left(100 - 15^2\right)^2 + 15^2 \cdot 10^2}} = 0.05\,.$$

Utslaget blir altså

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) = \underline{\underline{0.05\cos(15t - 2.60)}}\,.$$



Vi ser av grafen at utslaget kommer klart etter den ytre kraften, og at største utslag er bare halvparten av Y_0 .

Du stusser kanskje over at vi satte $Y_0 = 0.10$ i grafene ovenfor. Dette valget skyldes at dersom vi har en *konstant* kraft med størrelse $F_0 = 2.0\ \text{N}$, vil fjæra forlenges en strekning x_0 gitt ved

$$F_0 = k \cdot x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{F_0}{k} = \frac{2.0\ \text{N}}{20\ \text{N/m}} = 0.10\ \text{m}\,.$$

Vi sammenliknet altså med det utslaget vi ville fått om vi brukte en konstant kraft $F_0 = 2.0\ \text{N}$ istedenfor en varierende kraft

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = (2.0\ \text{N})\cos(\Omega t)\,.$$

Den viktigste lærdommen vi kan trekke av eksemplet ovenfor, er at amplituden til svingningene avhenger av frekvensen til den ytre kraften. Både for $\Omega = 5.0\ \text{rad/s}$ og for $\Omega = 10\ \text{rad/s}$ blir utslaget større enn om vi brukte en tilsvarende konstant kraft. Men for $\Omega = 15\ \text{rad/s}$ blir utslaget mindre. Denne effekten skal vi studere nærmere i neste avsnitt.

5. Resonans.

I forrige avsnitt fant vi at når svingesystemet gitt ved

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\,2} x = Y(t)$$

påvirkes av en ytre påvirkning

$$Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)\,,$$

er utslaget gitt ved

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

der

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

og

$$\tan\varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^{\,2} - \Omega^2}\,.$$

I eksempel 4.1 så vi hvordan A avhenger av vinkelfrekvensen Ω til den ytre påvirkningen. Vi så også at for visse verdier av Ω kan A bli større enn om systemet påvirkes av en *konstant* påvirkning Y_0 og slippes. Vi skal nå undersøke dette fenomenet nærmere.

Vi merker oss at både ω_0 og δ kun avhenger at hvordan det fysiske systemet er bygd opp. For et gitt system er disse størrelsene fast. Den eneste størrelsen som kan variere er Ω. For å finne ut hvordan A avhenger av Ω, deriverer vi A med hensyn på Ω. Da får vi

$$A = Y_0 \cdot \left(\left(\omega_0^{\,2} - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{d\Omega} = Y_0 \cdot \left(\left(\omega_0^{\,2} - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(2\left(\omega_0^{\,2} - \Omega^2\right)(-2\Omega) + 4\delta^2 \cdot 2\Omega\right)$$

$$= Y_0 \cdot \left(\left(\omega_0^{\,2} - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4\Omega\left(\Omega^2 - \omega_0^{\,2} + 2\delta^2\right)$$

For å finne største verdi av A løser vi likningen $\frac{dA}{d\Omega}=0$ med hensyn på Ω:

$$\frac{dA}{d\Omega}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega=0 \vee \Omega^2-\omega_0^{\,2}+2\delta^2=0\,.$$

Løsningen $\Omega=0$ er ikke interessant (den svarer til konstant ytre påvirkning). Vi må derfor konsentrere oss om

$$\Omega^2-\omega_0^{\,2}+2\delta^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\Omega=\sqrt{\omega_0^{\,2}-2\delta^2}}\,.$$

Vi ser altså at amplituden A blir størst når

$$\Omega=\Omega_{\text{res}}=\sqrt{\omega_0^{\,2}-2\delta^2}\,.$$

Denne frekvensen kalles *resonansfrekvensen* Ω_{res}. Vi ser at når $\delta<<\omega_0$ er $\Omega_{\text{res}}\approx\omega_0$. Men vi ser også at Ω_{res} alltid er mindre enn ω_0.

I uttrykket for resonansfrekvens må vi ha et positivt tall under rottegnet, d.v.s. at

$$\omega_0^{\,2}-2\delta^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta<\tfrac{1}{\sqrt{2}}\omega_0\,.$$

Vi ser altså at $\delta<\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$ for at vi skal få resonans. Dersom dempingen er så stor at δ er større enn denne grensen, får vi ikke resonans. Dette er viktig å kjenne til dersom vi har systemer der vi må unngå resonans.

For å finne ut hvor stort utslaget blir ved resonansfrekvensen, setter vi inn $\Omega_{\text{res}}=\sqrt{\omega_0^{\,2}-2\delta^2}$ i uttrykket for A:

$$A_{\text{res}}=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2}-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}}=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2}-\left(\omega_0^{\,2}-2\delta^2\right)\right)^2+4\delta^2\left(\omega_0^{\,2}-2\delta^2\right)}}$$

$$=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(2\delta^2\right)^2+4\delta^2\omega_0^{\,2}-8\delta^4}}=\frac{Y_0}{\sqrt{4\delta^2\omega_0^{\,2}-4\delta^4}}=\underline{\frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^{\,2}-\delta^2}}}$$

For oversiktens skyld skal jeg summere opp hovedtrekkene:

Et system som følger differensiallikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^{\,2}x=Y_0\cos(\Omega t)$$

utfører *tvungne svingninger*. Når stabil tilstand er inntrådt, er utslaget

$$x(t)=A\cos(\Omega t+\varphi)$$

der amplituden er

$$A=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2}-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}}$$

og

$$\tan\varphi=-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^{\,2}-\Omega^2}\,.$$

Dersom $\delta \le \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$, får vi *resonans* ved en *resonansfrekvens*

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - 2\delta^2}\ .$$

Ved denne frekvensen er amplituden i svingningene

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}}\ .$$

Eksempel 4.2: Vi skal holde oss til det samme kloss-fjær-systemet som vi har brukt tidligere (masse $m = 0.20\ \text{kg}$, $k = 20\ \text{N/m}$). Den ytre kraften er gitt ved

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = 2.0 \cos(\Omega t).$$

Da har vi tidligere vist at $\omega_0 = 10\ \text{rad/s}$ og at $Y_0 = 10\ \text{m/s}^2$.

a) Finn (om mulig) resonansfrekvensen og maksimalt utslag når dempingskonstanten er:
   1) $b = 0.5\ \text{N/(m/s)}$.
   2) $b = 1.0\ \text{N/(m/s)}$.
   3) $b = 2.0\ \text{N/(m/s)}$.
   4) $b = 4.0\ \text{N/(m/s)}$
b) Bestem den største verdien av *b* som kan gi resonans.
c) Tegn grafene av *A* som funksjon av Ω i de fire tilfellene som er brukt i del a) av eksemplet.

Løsning:

a1) Når $b = 0.5\ \text{N/(m/s)}$, er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{0.5\ \text{N/}(\text{m/s})}{2 \cdot 0.20\ \text{kg}} = 1.25\ \text{s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - 2\delta^2} = \sqrt{(10\ \text{rad/s})^2 - 2\cdot\left(1.25\ \text{s}^{-1}\right)^2} = \underline{\underline{9.84\ \text{rad/s}}}.$$

Ved denne frekvensen er maksimalt utslag

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}} = \frac{10\text{m/s}^2}{2\cdot 1.25\ \text{s}^{-1}\sqrt{(10\ \text{rad/s})^2 - \left(1.25\ \text{s}^{-1}\right)^2}} = \underline{\underline{0.403\ \text{m}}}$$

a2) Når $b = 1.0\ \text{N/(m/s)}$, er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{1.0\ \text{N/}(\text{m/s})}{2 \cdot 0.20\ \text{kg}} = 2.5\ \text{s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - 2\delta^2} = \sqrt{(10\ \text{rad/s})^2 - 2\cdot\left(2.5\ \text{s}^{-1}\right)^2} = \underline{\underline{9.35\ \text{rad/s}}}.$$

Ved denne frekvensen er maksimalt utslag

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}} = \frac{10\text{m/s}^2}{2\cdot 2.5\ \text{s}^{-1}\sqrt{(10\ \text{rad/s})^2 - \left(2.5\ \text{s}^{-1}\right)^2}} = \underline{\underline{0.207\ \text{m}}}.$$

a3) Når $b = 2.0$ N/(m/s), er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{2.0\ \text{N/}\left(\text{m/s}\right)}{2\cdot 0.20\ \text{kg}} = 5.0\ \text{s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - 2\delta^2} = \sqrt{\left(10\ \text{rad/s}\right)^2 - 2\cdot\left(5.0\ \text{s}^{-1}\right)^2} = \underline{\underline{7.07\ \text{rad/s}}}.$$

Ved denne frekvensen er maksimalt utslag

$$A_{\text{res}} = \frac{Y_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}} = \frac{10\text{m/s}^2}{2\cdot 5.0\ \text{s}^{-1}\sqrt{\left(10\ \text{rad/s}\right)^2 - \left(5.0\ \text{s}^{-1}\right)^2}} = \underline{\underline{0.115\ \text{m}}}.$$

a4) Når $b = 4.0$ N/(m/s), er

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{4.0\ \text{N/}\left(\text{m/s}\right)}{2\cdot 0.20\ \text{kg}} = 10.0\ \text{s}^{-1}.$$

Da blir

$$\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - 2\delta^2} = \sqrt{\left(10\ \text{rad/s}\right)^2 - 2\cdot\left(10.0\ \text{s}^{-1}\right)^2} = \sqrt{-100\ \text{rad/s}}.$$

Da er det ikke resonans.

b) For å få resonans, må

$$\delta \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 10\ \text{rad/s} = \underline{7.07\ \text{s}^{-1}}.$$

Da er

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad\Leftrightarrow\quad b = 2m\cdot\delta = 2\cdot 0.20\ \text{kg}\cdot 7.07\ \text{s}^{-1} = \underline{\underline{2.83\ \text{N/}\left(\text{m/s}\right)}}.$$

c) Vi setter inn kjente størrelser i uttrykket for amplituden, og ser bort fra benevninger:

$$A(\Omega) = \frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{\left(10^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}.$$

Da får vi:

1) $b = 0.5 \quad\Leftrightarrow\quad \delta = 1.25$.

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{\left(10^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\cdot 1.25^2\Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{\left(100 - \Omega^2\right)^2 + 6.25\Omega^2}}.$$

2) $b = 1.0 \quad\Leftrightarrow\quad \delta = 2.5$.

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{\left(10^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\cdot 2.5^2\Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{\left(100 - \Omega^2\right)^2 + 25\Omega^2}}.$$

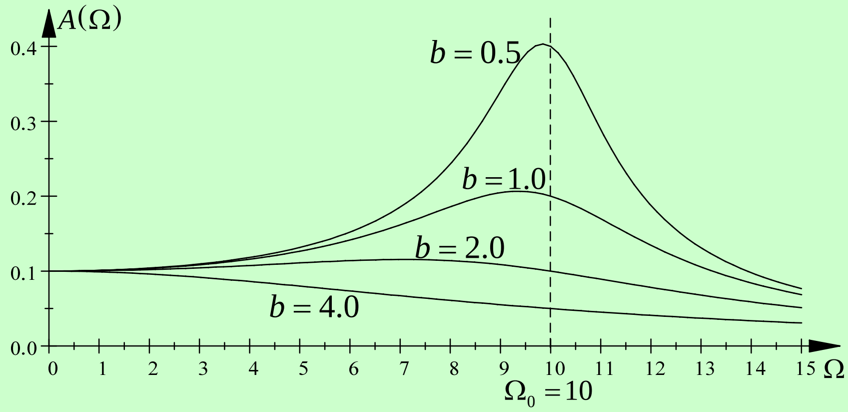
3) $b = 2.0 \quad\Leftrightarrow\quad \delta = 5.0$.

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{\left(10^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\cdot 5.0^2\Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{\left(100 - \Omega^2\right)^2 + 100\Omega^2}}.$$

4) $b = 3.0 \quad\Leftrightarrow\quad \delta = 10.0$

$$A(\Omega) = \frac{10}{\sqrt{\left(10^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\cdot 10^2\Omega^2}} = \frac{10}{\sqrt{\left(100 - \Omega^2\right)^2 + 400\Omega^2}}.$$

Plotter disse uttrykkene:



Vi ser at grafen stemmer med de verdiene vi fant i del a) av denne oppgaven.