Bruk av komplekse funksjoner.

Jeg skal nå vise hvordan vi kan bruke komplekse funksjoner for å finne en partikulær løsning av differensiallikningen for tvungne svingninger. Vi husker at denne svingelikningen ser slik ut:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0{}^2x=Y_0\cos(\Omega t). \tag{1}$$

Vi starter med å la $z(t)=x(t)+iy(t)$ være en *kompleks* funksjon av *t*, og ser på likningen

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\delta\frac{dz}{dt}+\omega_0{}^2z=Y_0e^{i\Omega t}=Y_0\left(\cos(\Omega t)+i\cdot\sin\Omega t\right). \tag{2}$$

Du ser at (1) blir realdelen av (2). Vi kan altså finne en partikulær løsning av (1) ved å finne en partikulær løsning av (2) og deretter finne realdelen av løsningen. Dette høres tungvint ut, men det er faktisk ganske greit når du først behersker regning med komplekse tall.

Vi antar at den partikulære løsningen av (2) er av formen

$$z_p(t)=Ae^{i\Omega t}$$

der *A* er en kompleks størrelse som vi skal finne. Vi starter med å derivere z_p to ganger:

$$\frac{dz_p}{dt}=i\Omega Ae^{i\Omega t}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2z_p}{dt^2}=i\Omega A\cdot i\Omega e^{i\Omega t}=-\Omega^2Ae^{i\Omega t}.$$

Innsetting i (2) gir:

$$-\Omega^2Ae^{i\Omega t}+2\delta i\Omega Ae^{i\Omega t}+\omega_0{}^2Ae^{i\Omega t}=Y_0e^{i\Omega t}.$$

Forkorter bort $e^{i\Omega t}$ og ordner:

$$A\left(\omega_0{}^2-\Omega^2+2\delta\Omega i\right)=Y_0\quad\Leftrightarrow\quad\underline{A=\frac{Y_0}{\omega_0{}^2-\Omega^2+2\delta\Omega i}}.$$

For å finne realdelen av løsningen, starter jeg med å skrive *A* på eksponentiell form. Jeg benytter da at nevneren i *A* kan skrives på formen $R\cdot e^{i\theta}$ der

$$R=\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}$$

og

$$\tan\theta=\frac{2\delta\Omega}{\omega_0{}^2-\Omega^2}.$$

Da blir

$$z_p=Ae^{i\Omega t}=\frac{Y_0}{R\cdot e^{i\theta}}e^{i\Omega t}=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}}e^{i(\Omega t-\theta)}$$
$$=\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}}\left(\cos(\Omega t-\theta)+i\sin(\Omega t-\theta)\right).$$

Vi er kun interessert i realdelen av z_p. Vi får

$$x_p=\operatorname{Re}(z_p)=\underline{\underline{|A|\cos(\Omega t+\varphi)}}$$

der

$$|A| = \underline{\underline{\frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\ 2} - \Omega^2\right)^2 + \left(2\delta\Omega\right)^2}}}}$$

og

$$\tan\varphi = \tan\left(-\theta\right) = \underline{\underline{-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^{\ 2} - \Omega^2}}}\ .$$

Dette er de samme resultatene som vi har funnet tidligere med mer tradisjonelle metoder. Men denne metoden ga mye enklere regning – i alle fall dersom du behersker regning med komplekse tall.