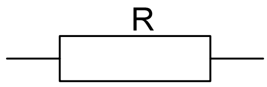
Elektriske svingninger.

1. Svingelikningen.

En vanlig elektrisk krets er bygd opp av tre typer komponenter:

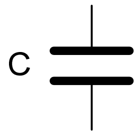
***Motstander*:**



Når det går en strøm $I(t)$ gjennom en motstand med resistans *R*, er spenningen over motstanden

$$U_R(t) = R \cdot I(t) .$$

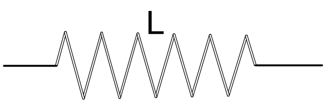
***Kondensatorer*:**



Når en kondensator med kapasitans *C* lades med en strøm $I(t)$, er spenningen over kondensatoren

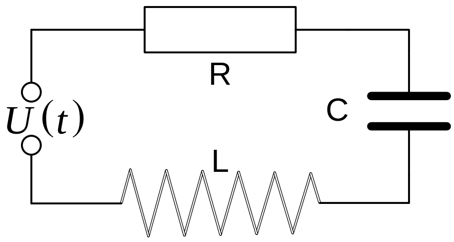
$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau .$$

***Spoler*:**



Når en strøm $I(t)$ går gjennom en spole med induktans *L*, er spenningen over spolen

$$U_L(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt} .$$



Vi skal konsentrere oss om en ***seriekrets*** der en motstand, en kondensator og en spole koples i serie sammen med en spenningskilde som gir en spenning $U(t)$. Da sier Kirchhoffs 1. lov at summen av spenningsfallene i kretsen (regnet med fortegn) skal være lik null:

$$U(t) - R \cdot I(t) - \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0 .$$

For å bli kvitt integralet, deriverer vi hele denne likningen og får:

$$\frac{dU(t)}{dt} = R \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I(t) + L \cdot \frac{d^2I(t)}{dt^2} .$$

Divisjon med *L* og ordning gir

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) = \frac{1}{L}\frac{dU(t)}{dt} .$$

Dette er ***svingelikningen*** for vår elektriske krets.

Det er lite aktuelt med frie svingninger i en slik krets. I praksis vil det alltid være resistans i kretsen, og denne resistansen vil raskt dempe svingningene. Vi går derfor rett løs på den mest interessante situasjonen: Tvungne svingninger.

2. Tvungne svingninger.

Vi skal nå anta at kretsen påvirkes av en ytre spenning $U(t)$. Vi skal også forutsette at den ytre spenningen er gitt ved

$$U(t) = U_0 \sin(\Omega t).$$

Da blir

$$\frac{dU(t)}{dt} = U_0 \Omega \cos(\Omega t)$$

slik at svingelikningen blir

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot I(t) = \frac{1}{L} U_0 \Omega \cos(\Omega t).$$

Siden løsningen av den homogene likningen raskt dempes mot null, er det kun den partikulære løsningen som er av interesse. Vi har tidligere funnet disse resultatene:

Differensiallikningen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = Y_0 \cos(\Omega t)$$

har en partikulær løsning

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$$

der amplituden er

$$A = \frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

og

$$\tan\varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2}.$$

Sammenlikner vi likningen for vår elektriske seriekrets med standardformen i ramma ovenfor, ser vi at

$$\delta = \frac{R}{2L}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \qquad Y_0 = \frac{1}{L} U_0 \Omega,$$

slik at vi får en partikulær løsning

$$I_p(t) = I_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

der

$$I_0 = \frac{Y_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{\frac{U_0 \Omega}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$

og $\tan\varphi = -\dfrac{2\delta\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2} = -\dfrac{\frac{R}{L}\Omega}{\frac{1}{LC} - \Omega^2} = -\dfrac{R}{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}.$

Her merker vi oss at den *udempede* vinkelfrekvensen for en slik krets er

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}\,.$$

Vi får ***resonans*** når I_0 har sin største verdi. Av uttrykket

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$

ser du direkte at I_0 er størst når nevneren er minst, d.v.s. når Ω er slik at

$$\frac{1}{\Omega C} - \Omega L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega^2 LC = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{\text{res}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{LC}}}} = \underline{\underline{\omega_0}}\,.$$

Resonansfrekvensen er altså alltid lik vinkelfrekvensen ω_0 til den *udempede* kretsen. Da er

$$I_{0,\max} = \frac{U_0}{\sqrt{0 + R^2}} = \frac{U_0}{R}\,.$$

Av Ohms lov ser vi at dette er lik strømmen i en likestrømskrets med konstant spenning U_0 over en motstand med resistans R.

3. Bruk av komplekse størrelser.

Når elektroingeniører analyserer vekselstrømskretser, benytter de *komplekse* størrelser. Vi skal nå bruke komplekse størrelser til å finne den partikulære løsningen av svingelikningen for vår seriekrets uten å ty til gjenbruk av tidligere resultater, og samtidig vise hvordan elektroingeniørenes komplekse størrelser framkommer.

Svingelikningen er altså

$$U(t) - R \cdot I(t) - \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau - L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = 0\,.$$

Som før setter vi inn

$$U(t) = U_0 \sin(\Omega t),$$

og likningen blir

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau = U_0 \sin(\Omega t)\,.$$

Nå definerer vi en *kompleks* funksjon

$$z(t) = x(t) + j \cdot I(t)$$

der vi bruker *j* istedenfor *i* som symbol for den imaginære enheten. Så setter vi opp differensiallikningen

$$L \cdot \frac{dz(t)}{dt} + R \cdot z(t) + \frac{1}{C}\int_0^t z(\tau)\,d\tau = U_0 e^{j\Omega t} = U_0\left(\cos(\Omega t) + j \cdot \sin(\Omega t)\right).$$

Da blir svingelikningen for vår elektriske krets *imaginærdelen* av den komplekse differensial-likningen ovenfor. Strategien vår blir nå å løse den komplekse differensiallikningen, og deretter finne imaginærdelen av denne løsningen.

For å bli kvitt integralet, deriverer vi likningen og får

$$L \cdot \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{dz(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot z(t) = j\Omega U_0 e^{j\Omega t}.$$

Vi prøver nå å finne en partikulær løsning av formen

$$z_p(t) = Ae^{j\Omega t}$$

der A er en kompleks konstant. Vi deriverer to ganger:

$$\frac{z_p(t)}{dt} = j\Omega A e^{j\Omega t} \quad \Rightarrow \quad \frac{z_p{}^2(t)}{dt^2} = j\Omega \cdot j\Omega A e^{j\Omega t} = -\Omega^2 A e^{j\Omega t}.$$

Dette setter vi inn i differensiallikningen og får:

$$L \cdot \left(-\Omega^2 A e^{j\Omega t}\right) + R \cdot \left(j\Omega A e^{j\Omega t}\right) + \frac{1}{C} \cdot A e^{j\Omega t} = j\Omega U_0 e^{j\Omega t}.$$

Så deler vi på $e^{j\Omega t}$ og ordner:

$$A\left(-L\Omega^2 + \frac{1}{C} + j \cdot R\Omega\right) = j\Omega U_0$$

$$A = \frac{j\Omega U_0}{-L\Omega^2 + \frac{1}{C} + j \cdot R\Omega} \cdot \frac{\frac{-j}{\Omega}}{\frac{-j}{\Omega}} = \frac{U_0}{R + j\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)}$$

Så skriver vi nevneren på eksponentiell form:

$$R + j\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = r \cdot e^{j\varphi}$$

der

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

og

$$\tan\varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}.$$

Da blir

$$z_p = Ae^{j\Omega t} = \frac{U_0}{r \cdot e^{j\varphi}} \cdot e^{j\Omega t} = \frac{U_0}{r} e^{-j\varphi} e^{j\Omega t} = \frac{U_0}{r} e^{j(\Omega t - \varphi)}$$

$$= \frac{U_0}{r}\left(\cos(\Omega t - \varphi) + j \cdot \sin(\Omega t - \varphi)\right)$$

Strømmen i kretsen er nå imaginærdelen av z_p:

$$I(t) = \mathrm{Im}\left(z_p\right) = \frac{U_0}{r}\sin(\Omega t - \varphi) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} \cdot \sin(\Omega t - \varphi).$$

Dette er samme uttrykk som vi fant tidligere. Men nå har vi funnet løsningen helt fra grunnen av, uten å benytte resultater som vi har funnet tidligere.

La oss vende tilbake til uttrykket

$$A = \frac{U_0}{R + j\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)}.$$

Dette er et uttrykk som elektroingeniørene kjenner godt. Nevneren kaller de *kretsens **impedans***, og bruker gjerne symbolet Z for den. Vi har altså

$$Z = R + j\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right) = R + j\Omega L + j\left(-\frac{1}{\Omega L}\right).$$

Nå har man innført

$$X_L = j\Omega L$$

som en slags ”resistans” som skyldes at spolen prøver å hindre at det går vekselstrøm gjennom den. Man har også innført

$$X_C = \frac{-1}{\Omega C} j = \frac{1}{j\Omega C}$$

som en slags ”resistans” som skyldes at kondensatoren slipper gjennom vekselstrøm, men prøver å hindre at *likestrøm* slipper gjennom.

Når elektroingeniørene benytter disse størrelsene, tegner de et komplekst plan der de avmerker R langs den reelle aksen, og X_L og X_C langs henholdsvis positiv og negativ imaginær akse. Deretter legges disse størrelsene sammen. Nå kan $|Z|$ og fasevinkelen φ leses direkte ut fra figuren.

I dette lille notatet har jeg begrenset meg til regning med en seriekrets med motstand, spole og kondensator. I praksis vil du komme bort i mange andre kretser. I prinsippet kan alle slike kretser behandles med differensiallikninger på samme måte som ovenfor, men regningene kan fort bli temmelig kompliserte. Heldigvis er det utarbeidet en del regler for regning med resistanser og impedanser som gjør det til en overkommelig jobb å analysere slike kretser. Når du bruker disse reglene slavisk, er det lett å glemme at bak disse reglene ligger det kunnskaper om komplekse tall og om løsing av andre ordens differensiallikninger.