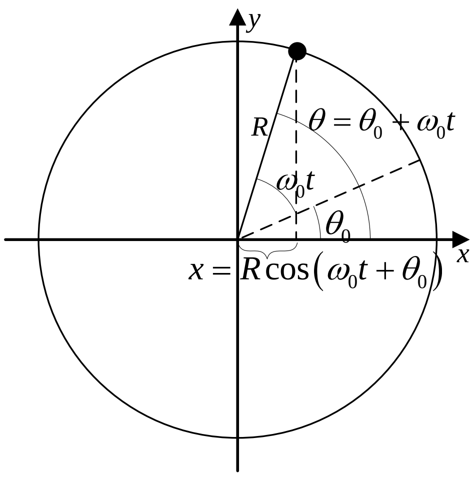
Svingninger.

1. Innledning.

Svingninger er helt vanlig i fysiske systemer. Som barn har du sikkert svingt fram og tilbake eller opp og ned i ei huske på lekeplassen. Som student har du kanskje jumpet opp og ned i en gammel bil med dårlig fjæring på hullete veier. Og hvis du har vært om bord i en båt i grov sjø, har du opplevd en mer kvalmende form for mekaniske svingninger.

Svingninger er også vanlig i elektriske systemer. All vekselstrømslære bygger på svingeteori. Mottaking av radio- og TV-signaler bygger på resonans mellom en elektrisk svingekrets og de mottatte signalene. Så du skjønner sikkert at en ingeniør bør kjenne til teorien for svingninger og resonans.

I dette notatet skal jeg ta for meg noen hovedtrekk av teorien for slike svingninger. Jeg skal definere et par sentrale begreper, og jeg skal vise hvordan frie, udempede svingninger kan oppstå i et enkelt mekanisk system. Mer realistiske situasjoner med demping og ytre krefter, samt resonans, vil bli behandlet i andre notat. Der vil jeg også gi en kort omtale av elektriske svingninger.



Vi skal starte med å se nærmere på en velkjent periodisk bevegelse: en partikkel som beveger seg med konstant vinkelfart ω_0 (målt i radianer pr sekund) i en sirkelbane med radius *R*. Dersom vi starter klokka idet linja fra origo til partikkelen danner en startvinkel θ_0 med *x*-aksen, vil partikkelen etter en tid *t* ha tilbakelagt en vinkel

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t .$$

Da er *x*-komponenten til partikkelens posisjon

$$x(t) = R\cos\theta = R\cos(\theta_0 + \omega_0 t).$$

Denne *x*-komponenten vil bevege seg fram og tilbake, omtrent som en pendel.

Den konstante vinkelfarten ω_0 kalles gjerne *vinkelfrekvensen* fordi den angir hvor mange *radianer* som tilbakelegges pr sekund. Dette må ikke forveksles med *frekvensen* som angir hvor mange hele svingninger som gjennomføres pr sekund. Siden en hel svingning utgjør 2π radianer, er sammenhengen mellom frekvensen *f* og vinkelfrekvensen ω_0 gitt ved

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi} .$$

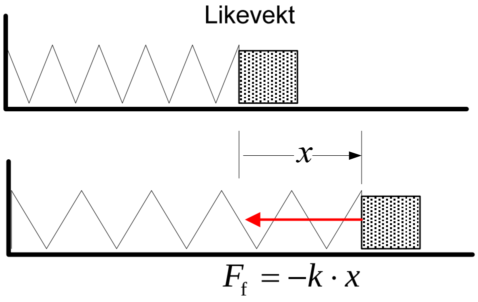
Frekvensen angir altså antall hele svingninger pr sekund (eller s^{-1}), som også benevnes *Hertz* (Hz).

En annen viktig størrelse er *svingetiden* eller *perioden T*, som er gitt ved

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0} .$$

Perioden angis helst i *sekund*.

2. Et kloss-fjær-system.



La oss nå se på et annet svingesystem som tilsynelatende er helt forskjellig fra partikkelen som går i sirkelbane med konstant vinkelfart. Vi skal se på en kloss med masse m som kan gli uten friksjon på en horisontal flate. Klossen er festet til ei fjær som har fjærkonstant k. Dersom fjæra forskyves en strekning x fra likevekt, vil fjæra trekke eller skyve klossen med en kraft

$$F_{\mathrm{f}} = -k \cdot x$$

der minustegnet angir at kraften alltid har motsatt retning av forskyvningen x fra likevekt. Klossens tyngde og normalkraften fra underlaget er motsatt like store, og tas derfor ikke med i kraftregnskapet.

Ifølge Newtons 2. lov vil denne kraften gi klossen en akselerasjon a gitt ved

$$F = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -k \cdot x = m \cdot a\,.$$

Nå må vi benytte at farten v er posisjonsendring pr tidsenhet, slik at

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

og at akselerasjonen a er fartsendring pr tidsenhet slik at

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\,.$$

Dermed blir Newtons 2. lov:

$$F = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -k \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

Dette er en lineær 2. ordens differensialliking. Vi setter opp og løser den karakteristiske likningen

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

der i er den imaginære enheten. Løsningen av differensiallikningen kan skrives på mange måter, for eksempel slik:

$$x(t) = A \cdot e^{0t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right).$$

Men dette minner jo påfallende om uttrykket for x-komponenten til partikkelen som går i sirkelbane:

$$x(t) = R\cos\theta = R\cos(\theta_0 + \omega_0 t)\,.$$

Disse uttrykkene blir like dersom vi setter

$$R = A\,, \qquad \theta_0 = \varphi\,, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Vi ser altså at klossen som er festet til ei fjær beveger seg på nøyaktig samme måte som x-komponenten til en partikkel som går i sirkelbane med konstant vinkelfart. Vi finner også frekvens og periode for svingebevegelsen uttrykt ved klossens masse og fjærkonstanten.

Vi oppsummerer:

Når en partikkel med masse *m* påvirkes av en kraft $F = -k \cdot x$, er partikkelens posisjon gitt ved differensiallikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0$$

Denne likningen har løsningen

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

der vinkelfrekvensen ω_0 og perioden *T* er gitt ved

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

En slik bevegelse kalles en ***enkel harmonisk svingning***, og partikkelen er en ***harmonisk oscillator***.

Eksempel 2.1: Ei elastisk fjær med fjærstivheten $k = 200\,\mathrm{N/m}$ er plassert horisontalt. Den ene enden av fjæra er fast i en vegg, mens den andre enden er festet til et legeme med massen $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ som ligger på et friksjonsfritt, horisontalt underlag. Vi drar legemet bort fra likevekt og slipper. Bestem vinkelfrekvensen, frekvensen og perioden til de resulterende oscillasjonene.

Løsning:
Siden det ikke virker andre horisontale krefter på legemet, er krafta på legemet gitt ved

$$F = -kx.$$

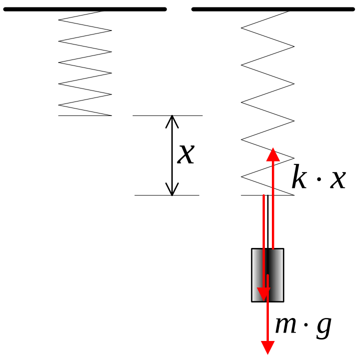
Dermed er legemet en harmonisk oscillator. Da vet vi at

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,\mathrm{N/m}}{0.50\,\mathrm{kg}}} = \underline{\underline{20\,\mathrm{rad/s}}}.$$

Da er:

$$\text{Frekvens} \qquad f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{20\,\mathrm{rad/s}}{2\pi} = \underline{\underline{3.2\,\mathrm{s}^{-1}}}.$$

$$\text{Periode} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.2\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{\underline{0.31\,\mathrm{s}}}.$$



Hva skjer dersom vi lar kloss-fjær-systemet henge fritt under påvirkning av tyngdekraften mg? I figuren til venstre antar vi at fjæra er så lett at vi kan se bort fra fjæras egen masse. Så henger vi opp loddet og setter det i svingninger.

Vi legger inn et koordinatsystem med positiv retning *nedover*. Når fjæra er strekt en strekning *x*, påvirkes klossen av en kraftsum

$$F = mg - kx.$$

Da blir Newtons 2. lov

$$F = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad mg - kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = g\ .$$

Dette er en inhomogen differensiallikning. Vi vet at løsningen kan skrives på formen

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der vi allerede vet at

$$x_h(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ der } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ .$$

Det er nå rimelig å anta at $x_p(t)$ er en konstant x_0 siden høyresiden av differensiallikningen er en konstant. Vi setter inn i likningen, og får

$$0 + \frac{k}{m}x_0 = g \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}\ .$$

Dermed har vi at

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \underline{\underline{A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{mg}{k}}}\ .$$

La oss se nærmere på uttrykket $x_0 = \dfrac{mg}{k}$. Det kan lett omformes til $mg = kx_0$, som sier at tyngdekraften er lik kraften i fjæra (men motsatt rettet). Dette er en likevektsposisjon der klossen kan henge i ro. Løsningen sier altså at klossen vil svinge om denne likevekts-posisjonen på samme måte som om den lå på et friksjonsfritt underlag.

Dette er et overraskende resultat. Sammen med uttrykket for perioden

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ser vi at **perioden avhenger kun av fjærkonstanten *k* og massen *m*, og avhenger ikke av tyngdens akselerasjon *g* eller av hvor stort utslaget er, eller av om klossen henger fritt eller glir på et vannrett, friksjonsfritt underlag.**

Hittil har vi kun sett på et kloss-fjær-system. Men det fins en mengde andre mekaniske system som oppfører seg på nøyaktig samme måte. Du finner et lite utvalg i et vedlegg.

I praksis vil slike svingende system alltid bli utsatt for *friksjon* som demper bevegelsen. Jeg har behandlet slike *dempede svingninger* i et eget notat.

Dersom vi vil holde liv i svingningene til tross for friksjonen, må systemet påvirkes av en eller annen form for ytre påvirkning. Da får vi *tvungne svingninger* som behandles i et eget notat, sammen med *resonans* som kan oppstå i slike situasjoner.

Når vi går gjennom teorien for tvungne svingninger, vil du nok innse at det blir en del kronglete regninger. Så rart det enn kan høres, kan disse beregningene forenkles ved å benytte komplekse funksjoner. Jeg har laget et lite tilleggsnotat som viser hvordan dette kan gjøres, og et annet lite notat som viser hvordan slike metoder benyttes i elektriske kretser.