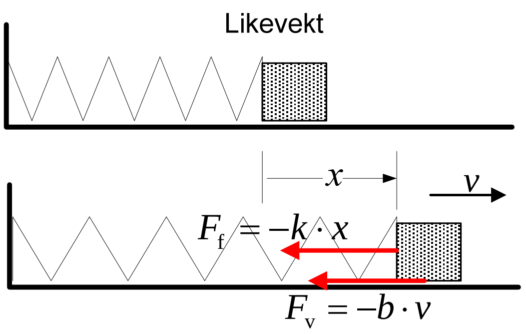
3. Dempede svingninger.

3.1. Likningen for en dempet svingning.

I innledningen så vi på et kloss-fjær-system uten friksjon. Nå skal vi trekke inn friksjon, og vi skal begrense oss til en form for friksjon som kalles *viskøs friksjon*. Denne karakteriseres ved at friksjonskraften er proporsjonal med farten og har motsatt retning av fartsretningen:

$$F_{\text{v}} = -b \cdot v\,.$$

Her er b en dempingsfaktor som gis i $\text{N}/(\text{m/s})$. Denne formen for friksjon er vanlig når man skal lage en enkel matematisk modell av luftmotstand eller vannmotstand, der b avhenger av legemets størrelse og form, og selvsagt av hvilket medium legemet beveger seg i.



Figuren til venstre antyder at Newtons 2. lov blir

$$-k \cdot x - b \cdot v = m \cdot a\,.$$

Så setter vi inn at $v = \dfrac{dx}{dt}$ og at $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, og får

$$-k \cdot x - b \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Vi ser at når $b = 0$ vil denne likningen reduseres til vår velkjente likning for en udempet svingning:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

eller generelt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^{\,2} \cdot x = 0$$

der $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ for vårt kloss-fjær-system. Nå viser det seg at helt tilsvarende likninger dukker opp i en mengde andre situasjoner. Vi skal derfor gi likningen en mer generell form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^{\,2} \cdot x = 0$$

der $\delta = \dfrac{b}{2m}$ for vårt kloss-fjær-system. Det merkelige 2-tallet skyldes at vi etter hvert får enklere uttrykk ved å sette det inn her. Vi summerer opp:

> Likningen for en dempet svingning er
>
> $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\,2}x = 0\,.$$
>
> Her er δ og ω_0 positive konstanter.
>
> For et kloss-fjær-system er $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ og $\delta = \dfrac{b}{2m}$.

3.2. Vi løser likningen.

På vanlig måte løser vi likningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^{\ 2} x = 0 .$$

ved å sette opp og løse den karakteristiske likningen:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^{\ 2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-2\delta \pm \sqrt{(2\delta)^2 - 4\omega_0^{\ 2}}}{2} = \underline{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\ 2}}} .$$

Nå må vi skille mellom tre tilfeller:

1. Dersom dempingen er så liten at $0 \le \delta < \omega_0$, får vi et negativt tall under rottegnet. Vi skriver da

   $$\lambda = -\delta \pm \sqrt{-\left(\omega_0^{\ 2} - \delta^2\right)} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2} = \underline{-\delta \pm i\omega}$$

   der vi har innført

   $$\omega = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2} .$$

   Løsningen av differensiallikningen kan da skrives på formen

   $$x(t) = \underline{\underline{Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)}} .$$

   Siden $\delta > 0$, er dette en cosinus-svingning der amplituden $Ae^{-\delta t}$ avtar med tiden og går mot null. Denne situasjonen kaller vi ***underdemping***, og vi sier at vi får en ***underdempet svingning*** (ofte bare kalt *dempet svingning*). Dette er en svært vanlig situasjon, og er behandlet spesielt i et lite tillegg.

2. Dersom dempingen er så stor at $\delta > \omega_0$, får vi et positivt tall under rottegnet. Den karakteristiske likningen får da to forskjellige reelle røtter λ_1 og λ_2. Løsningen av differensiallikningen blir derfor

   $$x(t) = \underline{\underline{C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}} .$$

   Nå blir både λ_1 og λ_2 negative tall fordi $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\ 2}} < \sqrt{\delta^2} = \delta$. Altså vil $x(t) \to 0$ når $t \to \infty$. Dette er helt naturlig fordi friksjonen fører til at bevegelsen stanser. Vi får faktisk ingen svinging i det hele tatt. Bevegelsen stopper idet klossen er tilbake i likevekts-posisjonen. Denne situasjonen kaller vi ***overdemping***.

3. På grensen mellom underdemping og overdemping er $\delta = \omega_0$. Dette spesialtilfellet kalles ***kritisk demping***, og spiller liten rolle i praksis. For fullstendighetens skyld kan vi likevel ta med at den karakteristiske likningen da får to like røtter

   $$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta ,$$

   slik at løsningen av differensiallikningen blir

   $$x(t) = \underline{\underline{C_1 e^{-\delta t} + C_2 t \cdot e^{-\delta t}}} .$$

Det er ikke meningen at du skal gå rundt og huske disse formlene. Du bør heller merke deg hvordan vi setter opp differensiallikningen, og løse den. Når jeg nå skal se på et eksempel med vårt kloss-fjær-system, vil jeg sette opp differensiallikningen ut fra Newtons 2. lov og løse derfra.

***Eksempel 3.1*:** Vi har et kloss-fjær-system der klossen har masse $m = 0.20\,\text{kg}$ mens fjærkonstanten er $k = 20\,\text{N/m}$.

a) Finn den generelle løsningen av svingelikningen i disse tilfellene:
   1) $b = 0$ (udempet svingning)
   2) $b = 1.12$ N/(m/s).
   3) $b = 5.0$ N/(m/s).
   4) Finn den verdien av b som gir kritisk demping, og finn den generelle løsningen av svingelikningen i dette tilfellet.

b) Klossen dras ut en strekning $x_0 = 0.10\,\text{m}$ og slippes uten startfart. Finn klossens posisjon x som funksjon av tiden t i de fire tilfellene som er angitt ovenfor, og tegn grafen til $x(t)$ i disse tilfellene.

Løsning:

a) Newtons 2. lov gir

$$F = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -b \cdot v - k \cdot x = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -b \cdot \frac{dx}{dt} - k \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 .$$

Setter inn de oppgitte dataene, ser bort fra benevninger og får

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{0.20} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{20}{0.20} \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{d^2x}{dt^2} + 5b \cdot \frac{dx}{dt} + 100x = 0} .$$

a1) Når $b = 0$ reduseres svinglikningen til

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0 .$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{-100} = \pm 10i .$$

Løsningen av svingelikningen kan da skrives

$$x(t) = \underline{\underline{A \cdot \cos(10t + \varphi)}} .$$

a2) Når $b = 1.12$ blir svinglikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \cdot 1.12 \frac{dx}{dt} + 100x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 5.6 \frac{dx}{dt} + 100x = 0 .$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 5.6\lambda + 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-5.6 \pm \sqrt{5.6^2 - 4 \cdot 100}}{2} = \frac{-5.6 \pm \sqrt{-368.64}}{2} = \frac{-5.6 \pm 19.2i}{2} = \underline{-2.8 \pm 9.6i}$$

Løsningen av svingelikningen kan da skrives

$$x(t) = \underline{\underline{A \cdot e^{-2.8t} \cdot \cos(9.6t + \varphi)}} .$$

a3) Når $b = 5.0$ blir svinglikningen

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\cdot 5.0\frac{dx}{dt}+100x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2}+25\frac{dx}{dt}+100x=0\,.$$

Den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2+25\lambda+100=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda=\frac{-25\pm\sqrt{25^2-4\cdot 100}}{2}=\frac{-25\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{-25\pm 15}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\begin{cases}\lambda_1=-5\\ \lambda_2=-20\end{cases}}$$

Løsningen av svingelikningen kan da skrives

$$x(t)=\underline{\underline{C_1e^{-5t}+C_2e^{-20t}}}\,.$$

a4) I det generelle tilfellet er den karakteristiske likningen

$$\lambda^2+5b\cdot\lambda+100=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=\frac{-5b\pm\sqrt{(5b)^2-4\cdot 100}}{2}=\frac{-5b\pm\sqrt{25b^2-400}}{2}\,.$$

Vi får kritisk demping når

$25b^2-400=0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b=4}$ (husk at b må være positiv).

Da blir

$$\lambda=\frac{-5\cdot 4}{2}=\underline{-10}$$

slik at løsningen av svingelikningen blir

$$x(t)=\underline{\underline{e^{-10t}\left(C_1+C_2t\right)}}\,.$$

b) Av opplysningene i oppgaven kan vi uten videre sette opp at

$$\underline{x(0)=0.10}\,.$$

Når klossen slippes uten startfart, er

$$v(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{dx}{dt}(0)=0}\,.$$

Dette gir to likninger som vi kan finne de ukjente konstantene fra.

b1) $x(t)=A\cdot\cos(10t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt}=A\cdot 10\big(-\sin(10t+\varphi)\big)$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad A\cdot\cos(10\cdot 0+\varphi)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad A\cos\varphi=0.10\,. \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 10A\big(-\sin(10\cdot 0+\varphi)\big)=0 \quad \Leftrightarrow \quad A\sin\varphi=0\,. \qquad (2)$$

Av (2) får vi $\varphi=0$ eller $\varphi=\pi$. For å få positiv A i (1), må vi bruke $\underline{\varphi=0}$. Da blir

$$A\cdot\cos 0=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A=0.10}\,.$$

Løsningen blir da

$$x(t)=\underline{\underline{0.10\cos(10t)}}$$

b2) $x(t)=A\cdot e^{-2.8t}\cdot\cos(9.6t+\varphi)$

$$\frac{dx}{dt}=A\left(-2.8\cdot e^{-2.8t}\cdot\cos(9.6t+\varphi)+e^{-2.8t}(-9.6)\sin(9.6t+\varphi)\right)$$

$$=-Ae^{-2.8t}\left(2.8\cos(9.6t+\varphi)+9.6\sin(9.6t+\varphi)\right)$$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad A\cdot e^{-2.8\cdot 0}\cdot\cos(9.6\cdot 0+\varphi)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad A\cos\varphi = 0.10\,. \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -Ae^{-2.8\cdot 0}\left(2.8\cos(9.6\cdot 0+\varphi)+9.6\sin(9.6\cdot 0+\varphi)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(2.8\cos\varphi + 9.6\sin\varphi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 9.6\sin\varphi = -2.8\cos\varphi \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\varphi = -\tfrac{2.8}{9.6} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \underline{-0.284} \vee \varphi = \underline{2.858}$$

Merk at vi må oppgi vinkelen i radianer.
For å få positiv A i (1), må vi bruke $\underline{\varphi=-0.284}$. Da blir

$$A\cdot\cos(-0.284)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A=0.104}\,.$$

Løsningen blir da

$$x(t)=\underline{\underline{0.104\cdot e^{-2.8t}\cdot\cos(9.6t-0.284)}}$$

b3) $x(t)=C_1e^{-5t}+C_2e^{-20t} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt}=-5C_1e^{-5t}-20C_2e^{-20t}\,.$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad C_1e^{-5\cdot 0}+C_2e^{-20\cdot 0}=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad C_1+C_2=0.10\,. \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -5C_1e^{-5\cdot 0}-20C_2e^{-20\cdot 0}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -C_1-4C_2=0\,. \qquad (2)$$

Vi legger sammen likningene, og får

$$-3C_2=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad C_2=\underline{-0.033}\,.$$

Da blir

$$C_1=-4C_2=-4\cdot(-0.033)=\underline{0.133}$$

Løsningen blir da

$$x(t)=\underline{\underline{0.133e^{-5t}-0.033e^{-20t}}}\,.$$

b4) $x(t)=e^{-10t}(C_1+C_2t)$

$$\frac{dx}{dt}=-10e^{-10t}(C_1+C_2t)+e^{-10t}\cdot C_2=\underline{e^{-10t}(C_2-10C_1-10C_2t)}$$

De to startbetingelsene gir nå

$$x(0)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-10\cdot 0}(C_1+C_2\cdot 0)=0.10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_1=0.10}\,. \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-10\cdot 0}(C_2-10\cdot 0.10-10C_2\cdot 0)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{C_2=1} \qquad (2)$$

Løsningen blir da

$$x(t)=\underline{\underline{e^{-10t}(0.10+t)}}$$

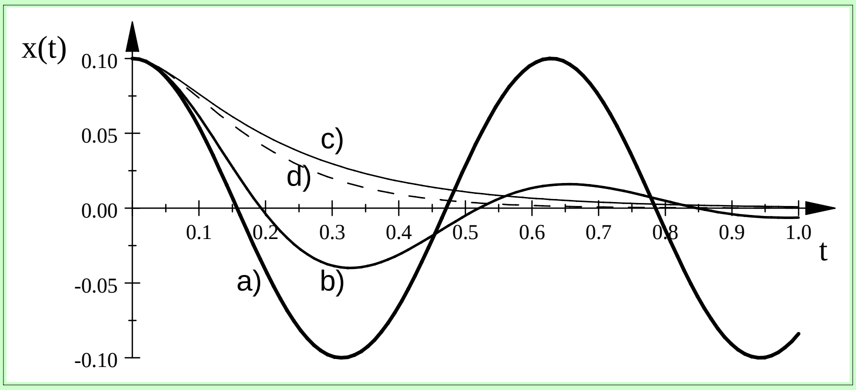
De løsningene vi har funnet i de fire tilfellene, ser svært ulike ut. Men når vi tegner grafene, viser det seg at de ikke blir så ulike likevel. Grafene til funksjonene er vist nedenfor. Der ser du bl.a. at for den udempede svingningen blir svingetiden

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{10\,\mathrm{s}^{-1}}\approx 0.628\,\mathrm{s}\,.$$

Hvis du ser nøye etter, vil du se at svingetiden for den dempede svingningen er *litt* lengre. Det er rimelig, fordi svingetiden nå blir

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{9.6\,\mathrm{s}^{-1}} \approx 0.654\,\mathrm{s}\,.$$

Ikke store forskjellen, men så vidt synlig på grafen.



Hittil har vi forutsatt at vårt svingende system ikke utsettes for ytre krefter (mer presist: vektorsummen av eventuelle ytre krefter er lik null). Da vil svingningene før eller senere dø bort, siden det i praksis alltid vil være friksjon til stede. Dersom vi skal opprettholde svingningene, må det være ytre krefter til stede. Da får vi ***tvungne svingninger*** med mulighet for ***resonans***.