Sfærisk trigonometri

1. Innledning.

Når du har jobbet med geometri og trigonometri, har du alltid forutsatt at figurene dine lå i et plan. Nå skal vi imidlertid flytte oss over på overflaten av ei kule. Geometri og trigonometri på overflaten av ei kule kalles ***sfærisk geometri*** og ***sfærisk trigonometri***.

Det er vanlig å anta at jordkloden er kuleformet, og at jordoverflaten derfor er ei kuleflate. Som kjent er ikke dette helt korrekt, men for de fleste praktiske formål er denne antakelsen god nok. De grunnleggende formlene for navigasjon (enten det gjelder båter eller fly) bygger på sfærisk trigonometri.

Det er også hensiktsmessig å betrakte himmelen over oss som ei ”himmelkule”. Posisjonene til sol og måne, planeter og stjerner kan beregnes og angis ved hjelp av sfærisk trigonometri. Før vi fikk GPS og andre elektroniske hjelpemidler, var det svært nyttig å kunne bestemme et skips posisjon ved hjelp av solens posisjon, kalender og klokke. Slik posisjonsbestemmelse bygger også på sfærisk trigonometri.

I dette lille notatet skal jeg ta for meg de grunnleggende begrepene innenfor sfærisk trigonometri. Jeg skal også utlede noen av de viktigste formlene, og vise hvordan de kan benyttes til navigasjon.

2. Noen grunnleggende begreper.

Vi definerer begrepet ***storsirkel*** slik:

Når ei kuleflate skjæres av et plan som går gjennom kulas sentrum, blir skjæringslinja mellom kuleflata og planet en ***storsirkel*** på kuleflata.

Slike storsirkler er svært nyttige, bl.a. fordi:

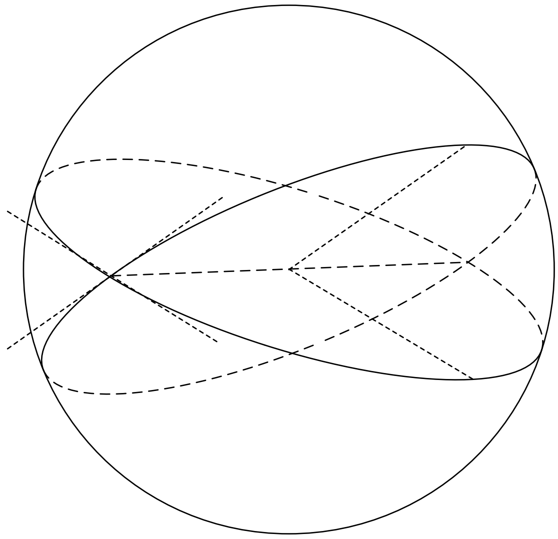
La A og B være to punkter på ei kuleflate. Dersom A og B ikke ligger på samme rette linje gjennom kulas sentrum, er det alltid mulig å legge en og kun en storsirkel som inneholder A og B.

Den korteste avstanden mellom A og B langs kuleflata går langs denne storsirkelen.

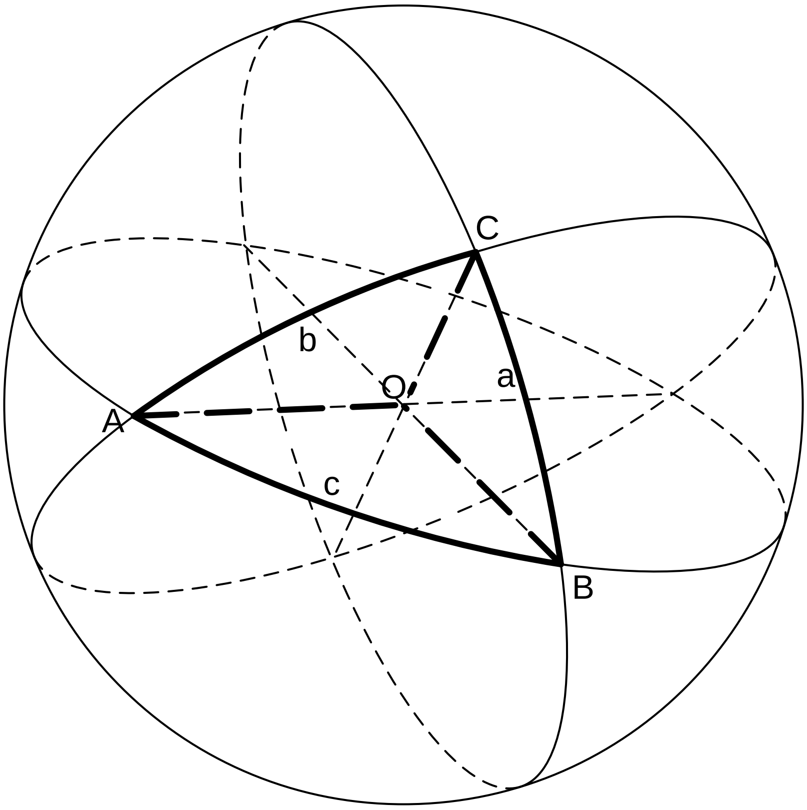
Den første påstanden er innlysende: Når A og B ligger på kuleflata uten å ligge på samme rette linje gjennom sentrum O, er det alltid mulig å legge ett og kun ett plan som inneholder de tre punktene A, B og O. Dette planet skjærer kula i en storsirkel.

Den andre påstanden skal vi ikke bevise her.

Vi går nå et skritt videre, og skjærer kula med *to* ikke-parallelle plan som begge går gjennom kulas sentrum. Vi får da to storsirkler som skjærer hverandre. Hvis vi trekker tangentene til disse storsirklene i deres skjæringspunkt, vil vinkelen mellom tangentene være lik vinkelen mellom planene. Dette er illustrert på figuren til høyre.



La oss ta enda et skritt, og skjære de to storsirklene som vi allerede har med en tredje storsirkel. Da får vi figuren nedenfor.



Vi ser at de tre storsirklene danner en ***sfærisk trekant*** med hjørner *A*, *B* og *C*. (Storsirklene danner faktisk 8 sfæriske trekanter, men vi skal konsentrere oss om den trekanten som er framhevet på figuren.)

De tre hjørnene *A*, *B* og *C* kalles ***trekantens vinkler***. Som vi allerede har sett, er disse vinklene lik vinklene mellom de planene som danner storsirklene. Disse vinklene måles i vanlig vinkelmål (grader eller radianer).

Fra plangeometrien vet du at i en plan trekant er vinkelsummen alltid 180°. For en sfærisk trekant har vi imidlertid at ***vinkelsummen er alltid større enn*** $\mathbf{180^o}$.

Arealet av en sfærisk trekant beregnes helt annerledes enn for plane trekanter. Vi kan nemlig vise at:

Arealet av en sfærisk trekant med vinkler *A*, *B* og *C* på ei kule med radius *R* er

$$F = R^2(A+B+C-\pi)$$

der *A*, *B* og *C* er målt i radianer.

De tre buene *AB*, *AC* og *BC* kalles ***trekantens sider*** slik at motstående side til hjørnet *A* er *a*, motstående side til hjørnet *B* er *b*, og motstående side til hjørnet *C* er *c*. Sidene måles ikke med lengdemål slik som for plane trekanter. ***Sidene i en sfærisk trekant måles med vinkelmål***. Mer presist er lengden av siden a lik vinkelen mellom radiene *OB* og *OC*, og tilsvarende for de andre sidene.

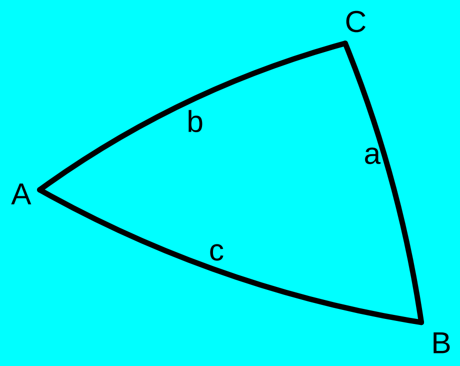
Når vi i praksis skal tegne en sfærisk trekant, bruker vi sjelden å tegne hele kula med alle storsirklene. Vi tegner heller bare trekanten, og prøver å gi inntrykk av at den befinner seg på ei kule.

3. De grunnleggende formlene.

Vi skal nå se på de grunnleggende formlene som gjelder for sfæriske trekanter. I dette dokumentet skal jeg sette opp formlene, og vise eksempler på bruken av dem. Jeg skal også se på noen av deres begrensninger. Utledning av formlene finner du i et vedlegg.

De viktigste formlene er ***cosinus-setningene*** og ***sinus-setningen***, som er satt opp nedenfor:

For en sfærisk trekant *ABC* med motstående sider *a*, *b*, og *c* har vi:



Cosinus-setningene:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A\,.$$
$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B\,.$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\,.$$

Sinus-setningen:

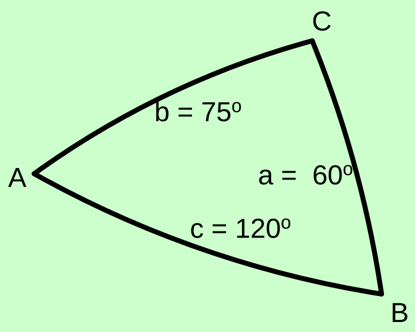
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\,.$$

Selv om sinus-setningen gir enklere regninger enn cosinus-setningene, foretrekker vi ofte å bruke cosinus-setningene dersom vi kan velge mellom dem. Grunnen er at når du kjenner cosinus til en vinkel, er også vinkelen entydig bestemt i området $\left[0^\circ, 180^\circ\right]$. Det er ikke tilfelle med sinus, ettersom $\sin\left(180^\circ - v\right) = \sin v$. Det betyr at dersom du kjenner en sinus-verdi, vet du ikke i utgangspunktet om du skal bruke den vinkelen v i første kvadrant som kalkulatoren gir ut, eller om du skal bruke vinkelen $180^\circ - v$ i andre kvadrant. Dette problemet skal vi belyse i eksemplene nedenfor.

Først et eksempel der vi kjenner alle de tre sidene, og skal finne vinklene.

Eksempel 1: I den sfæriske trekanten *ABC* er siden $a = 60^\circ$, siden $b = 75^\circ$ og siden $c = 120^\circ$. Finn vinklene i trekanten.

Løsning:



Jeg bruker cosinus-setningene til å finne vinklene. Først vinkel *A*:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ - \cos 75^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 75^\circ \cdot \sin 120^\circ}$$

$$= 0.7524 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{\underline{41.2^\circ}}$$

Deretter vinkel *B*:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} = \frac{\cos 75^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 120^\circ} = 0.6784 \quad \Leftrightarrow \quad B = \underline{\underline{47.3^\circ}}$$

Til slutt vinkel *C*:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\cos 120^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 75^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 75^\circ} = -0.7524 \quad \Leftrightarrow \quad C = \underline{\underline{138.8^\circ}}$$

Når vinkel *A* og de tre sidene er kjent, kan jeg også finne vinklene *B* og *C* ved hjelp av sinus-setningen, som gir mindre regning. Jeg får da:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

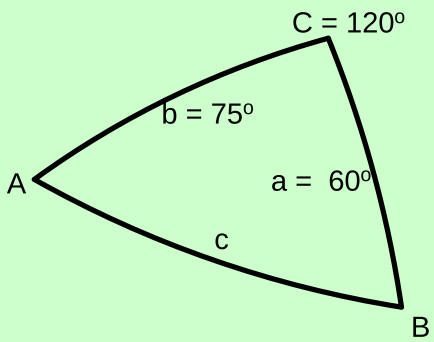
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin B = \dfrac{\sin A}{\sin a} \cdot \sin b = \dfrac{\sin 41.2^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 75^\circ = 0.7347 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = \underline{47.3^\circ} \\ B = 180^\circ - 47.3^\circ = \underline{132.7^\circ} \end{cases} \\[2ex] \sin C = \dfrac{\sin A}{\sin a} \cdot \sin c = \dfrac{\sin 41.2^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 120^\circ = 0.6587 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C = \underline{41.2^\circ} \\ C = 180^\circ - 41.2^\circ = \underline{138.8^\circ} \end{cases} \end{cases}$$

Vi ser at jeg får *to* mulige verdier for hver vinkel når jeg bruker sinus-setningen. Grunnen er jo at når jeg bare kjenner sinus-verdien, vet jeg ikke om vinkelen ligger i 1. eller i 2. kvadrant. Dette illustrerer at når vi bruker sinus-setningen, må vi ta en figur til hjelp og avgjøre om vi skal bruke en vinkel i 1. kvadrant eller i 2. kvadrant. Men dersom vi får sinus-verdier nær 1, kan det være vanskelig å avgjøre om vinkelen er litt mindre enn 90° eller litt større enn 90°.

Så skal vi ta et eksempel der vi kjenner to sider og sidenes mellomliggende vinkel.

Eksempel 2: I den sfæriske trekanten *ABC* er siden $a = 60^\circ$, siden $b = 75^\circ$ og vinkelen $C = 120^\circ$. Finn siden *b* og vinklene *A* og *B* i trekanten.

Løsning:



Vi starter med å bruke cosinus-setningen til å finne siden *c*:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \\ &= \cos 60^\circ \cdot \cos 75^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \cos 120^\circ \\ &= -0.2886 \quad \Leftrightarrow \quad c = \underline{\underline{106.8^\circ}} \end{aligned}$$

Nå er det fristende å bruke sinus-setningen til å finne vinklene *A* og *B*. Men klok av skade fra forrige eksempel bruker vi cosinus-setningen:

Først vinkel *B*:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} = \frac{\cos 75^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 106.8^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 106.8^\circ} = 0.4865 \quad \Leftrightarrow \quad B = \underline{\underline{60.9^\circ}}$$

Så kommer vinkel *A*:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 75^\circ \cdot \cos 106.8^\circ}{\sin 75^\circ \cdot \sin 106.8^\circ} = 0.6216 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{\underline{51.6^\circ}}$$

Begge vinklene er mindre enn 90°. Da skal vi kunne kontrollere beregningene med sinus-setningen:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin B = \dfrac{\sin C}{\sin c} \cdot \sin b = \dfrac{\sin 120^\circ}{\sin 106.8^\circ} \cdot \sin 75^\circ = 0.7347 \quad \Leftrightarrow \quad B = \underline{60.9^\circ} \\ \sin A = \dfrac{\sin C}{\sin c} \cdot \sin a = \dfrac{\sin 120^\circ}{\sin 106.8^\circ} \cdot \sin 60^\circ = 0.7834 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{51.6^\circ} \end{cases}$$

Vi ser at vi får de samme verdiene som før.

Nå fins det mange andre kombinasjoner av tre kjente og tre ukjente størrelser i en sfærisk trekant:

- Vi kjenner to sider og motstående vinkel til en av sidene.
- Vi kjenner to vinkler og en side (mellomliggende side til de to vinklene, eller motstående side til en av dem).
- Vi kjenner alle tre vinklene.

Selv om vi kan manipulere med sinus- og cosinus-setningene for å løse slike problem, er det gunstigere å utlede nye setninger. Vi skal starte med å lage varianter av sinus- og cosinus-setningene på grunnlag av ***polare trekanter*** som vi skal ta for oss nedenfor.

4. Polare trekanter.

Vi tar utgangspunkt i en sfærisk trekant *ABC* med sider *a*, *b* og *c* som før. Vi kan da vise (se vedlegg) at det må eksistere en ***polar trekant*** $A'B'C'$ med sider a', b' og c' som er slik at:

$$A' + a = 180^\circ \qquad B' + b = 180^\circ \qquad C' + c = 180^\circ$$
$$A + a' = 180^\circ \qquad B + b' = 180^\circ \qquad C + c' = 180^\circ$$

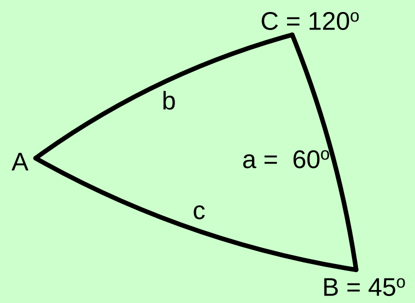
Settes disse sammenhengene inn i cosinus-setningene, får vi (se vedlegget) at

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c$$

Nå skal vi se hva disse setningene kan brukes til. Vi skal se på et eksempel der vi kjenner to vinkler og deres mellomliggende side.

Eksempel 3: I den sfæriske trekanten *ABC* er vinkelen $B = 45^\circ$ og vinkelen $C = 120^\circ$, og siden $a = 60^\circ$. Finn sidene *b* og *c*, og vinkelen *A* i trekanten.

Løsning:



Vi starter med å bruke cosinus-setningen til å finne vinkelen *A*:

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \\ &= -\cos 45^\circ \cdot \cos 120^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 60^\circ \\ &= 0.6597 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{\underline{48.7^\circ}}\end{aligned}$$

Nå er det fristende å bruke sinus-setningen til å finne sidene *b* og *c*. Men klok av skade fra et tidligere eksempel bruker vi cosinus-setningen:

Først siden *b*:

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C} = \frac{\cos 45^\circ + \cos 48.7^\circ \cdot \cos 120^\circ}{\sin 48.7^\circ \cdot \sin 120^\circ} = 0.4865$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \underline{\underline{54.6^\circ}}$$

Så kommer siden *c*:

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{\cos 120^\circ + \cos 48.7^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\sin 48.7^\circ \cdot \sin 45^\circ} = -0.0627$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \underline{\underline{93.6^\circ}}$$

La oss se hva som skjer hvis vi bruker sinus-setningen:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin b = \dfrac{\sin a}{\sin A} \cdot \sin B = \dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 48.7^\circ} \cdot \sin 45^\circ = 0.8151 & \Leftrightarrow \begin{cases} b = \underline{54.6^\circ} \\ b = 180^\circ - 54.6^\circ = \underline{125.4^\circ} \end{cases} \\ \sin c = \dfrac{\sin a}{\sin A} \cdot \sin C = \dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 48.7^\circ} \cdot \sin 120^\circ = 0.9983 & \Leftrightarrow \begin{cases} c = \underline{86.7^\circ} \\ c = 180^\circ - 86.7^\circ = \underline{93.3^\circ} \end{cases} \end{cases}$$

Som ventet får vi to verdier for de ukjente sidene. Av en figur er det mulig å se hvilken verdi vi må bruke for siden *b*, mens det i praksis ikke er mulig å se om vi skal bruke $c = 86.7^\circ$ eller $c = 93.6^\circ$. I slike situasjoner er vi nødt til å bruke cosinus-setningen.

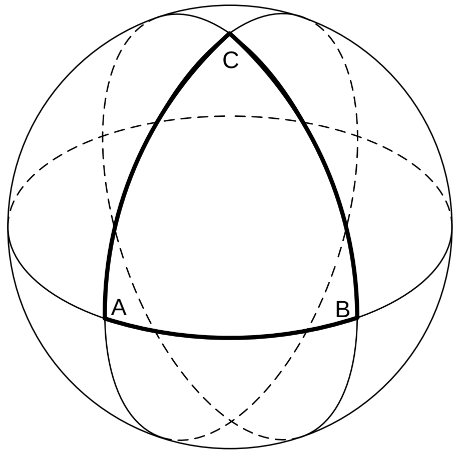
For ordens skyld vil jeg påpeke at også cosinus-setningene kan gi tvetydige resultater, fordi vinklene *v* og $-v$ har samme cosinus-verdi. Men i praksis fører denne tvetydigheten sjelden til problemer fordi sidene og vinklene i sfæriske trekanter alltid er positive. I navigasjon kan denne tvetydigheten være av betydning fordi vi der opererer med negative vinkler. Disse problemene skal vi ta for oss etter hvert.

Vi har tidligere nevnt at mens vinkelsummen i en plan trekant alltid er 180°, er vinkelsummen i en sfærisk trekant alltid større enn 180°. Men det er flere forskjeller mellom plane trekanter og sfæriske trekanter:

- En plan trekant er ikke entydig bestemt selv om alle de tre vinklene er kjente, og du kan derfor ikke beregne sidene. En sfærisk trekant er derimot entydig bestemt nå de tre vinklene er kjente, og sidene kan beregnes med de cosinus-setningene som vi nettopp har utledet.

- En plan trekant er entydig bestemt når vi kjenner to sider og deres motstående vinkler. En sfærisk trekant er derimot ikke entydig bestemt selv om vi kjenner to sider og deres motstående vinkler.

  Et enkelt eksempel:
  På figuren til venstre er *C* polen til buen *AB*. I den sfæriske trekanten *ABC* vet vi da at de to vinklene *A* og *B* begge er 90°, og at deres motstående sider begge er 90°. Men vi kan ikke si noe om hvor stor vinkelen *C* eller siden *AB* er (bortsett fra at de må være like store).



5. Litt navigasjon.

Som nevnt i innledningen kan vi med brukbar tilnærmelse anta at jordkloden er kuleformet. Lengdeenheten ***nautisk mil*** var i utgangspunktet definert som lengden av ett bueminutt langs en storsirkel på denne jord-kula, og tilsvarer 1852 meter. Dette gjør at sfærisk trigonometri egner seg godt til å beregne avstander og retninger (vinkler) ved navigasjon.

Vi bruker et koordinatsystem der jordas rotasjonsakse skjærer jordkula i ***geografisk nord- og sydpol***. Disse to polene er samtidig poler til en storsirkel som vi kaller ***ekvator***. Deretter konstruerer vi ***meridianer*** som er storsirkler vinkelrett på ekvator gjennom polene.

Posisjonen til et punkt på jordkloden angis vanligvis ved stedets ***breddegrad*** og stedets ***lengdegrad***:

Breddegraden b_A til et punkt *A* er lengden av buen langs en meridian fra ekvator til punktet, regnet positiv nordover og negativ sydover. Dette medfører at $-90^\circ \le b_A \le 90^\circ$.

Lengdegraden l_A til et punkt A er vinkelen mellom meridianen gjennom et punkt i London (Greenwich) og meridianen gjennom punktet, regnet positiv østover fra Greenwich og negativ vestover. Dette medfører at $-180^\circ \le l_A \le 180^\circ$.

Vi skal nå anta at vi kjenner breddegrad b_A og lengdegrad l_A til et punkt *A* (*A*vfarende), og breddegrad b_P og lengdegrad l_P til et punkt *P* (*P*åkommende). Da kan vi også regne ut ***forandret bredde*** $l_f = l_P - l_A$, som er forskjellen i lengdegrad mellom *P* og *A*.

Nå kan vi regne oss fram til ***distansen*** *d* mellom *A* og *P* langs storsirkelen gjennom *A* og *P*, og ***kursen*** *k* langs storsirkelen gjennom *A* og *P*, ved hjelp av disse navigasjonsformlene:

La b_A og b_P være *breddegraden* til henholdsvis avfarende og påkommende punkt.
La l_A og l_P være *lengdegraden* til henholdsvis avfarende og påkommende punkt.
Definer *forandret lengde* $l_f = l_P - l_A$.

Da er ***distansen d*** gitt ved

$$\cos d = \sin b_P \cdot \sin b_A + \cos b_P \cdot \cos b_A \cdot \cos l_f \,.$$

Dersom distansen d er kjent, kan ***kursen*** k beregnes av formelen

$$\sin k = \frac{\sin l_f}{\sin d} \cdot \cos b_P \,.$$

Dersom distansen d ikke er kjent, kan kursen k beregnes av ***tangensformelen*** eller ***den tredje grunnformelen***.

$$\tan k = \frac{\sin l_f}{\tan b_P \cdot \cos b_A - \sin b_A \cdot \cos l_f} \,.$$

Når disse formlene brukes i praksis, er det vanlig å starte med å bruke tangens-formelen til å beregne kursen ut fra kjente verdier for b_A, b_P og l_f. Vi får da en k i området $\left[-90^\circ, 90^\circ\right]$, som svarer til at vi seiler nordover. Dersom vi skal seile sydover må vi øke eller minke k med 180°. Tangensformelen vil i alle fall entydig bestemme den storsirkelen vi skal seile langs.

Distanse-formelen gir oss cosinus til d, slik at d er entydig bestemt i området $\left[0^\circ, 180^\circ\right]$. For alle praktiske formål er dette tilstrekkelig.

Eksempel 4: Et fly skal fra Buenos Aires (34.40°S, 58.30°W) til Aten (38.00°N, 23.44°E). Finn distanse og retning langs en storsirkel.

Løsning: Finner først distansen d:

$$\begin{aligned}\cos d &= \sin b_P \cdot \sin b_A + \cos b_P \cdot \cos b_A \cdot \cos l_f \\ &= \sin\left(38.00^\circ\right) \cdot \sin\left(-34.40^\circ\right) + \cos\left(38.00^\circ\right) \cdot \cos\left(-34.40^\circ\right) \cdot \cos\left(23.44^\circ - \left(-58.30^\circ\right)\right) \\ &= -0.2544 \quad \Leftrightarrow \quad d = \underline{\underline{104.7^\circ}} = 104.7 \cdot 60 \cdot 1.852\,\text{km} = \underline{\underline{11630\,\text{km}}}\end{aligned}$$

Når distansen er kjent, kan retningen (kursen) bestemmes slik:

$$\sin k = \frac{\sin l_f}{\sin d} \cdot \cos b_P = \frac{\sin\left(23.44^\circ - \left(-58.30^\circ\right)\right)}{\sin 104.7^\circ} \cdot \cos\left(38.00^\circ\right) = 0.8062$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \underline{\underline{53.7^\circ}}$$

Vi kan også bestemme kursen ved hjelp av tangens-formelen slik:

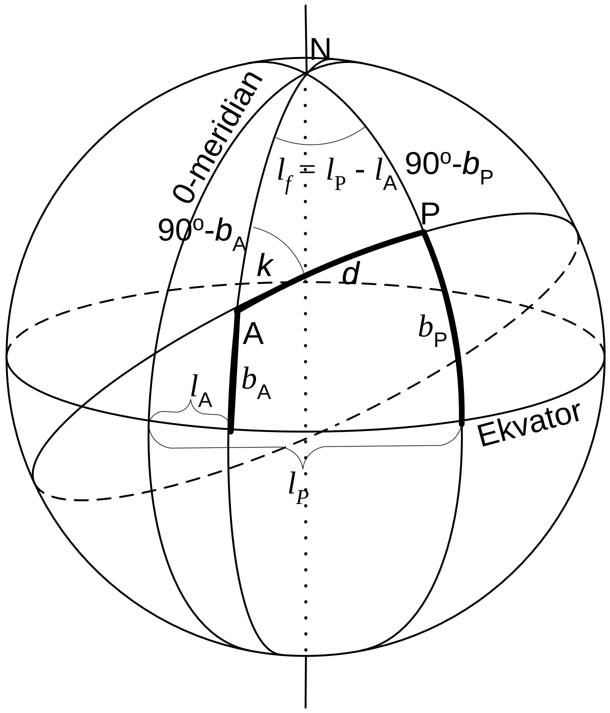
$$\tan k = \frac{\sin l_f}{\tan b_P \cdot \cos b_A - \sin b_A \cdot \cos l_f}$$

$$= \frac{\sin\left(23.44^\circ - \left(-58.30^\circ\right)\right)}{\tan\left(38.00^\circ\right)\cdot\cos\left(-34.40^\circ\right) - \sin\left(-34.40^\circ\right)\cos\left(23.44^\circ - \left(-58.30^\circ\right)\right)}$$

$$= 1.3635 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = 53.7^\circ}}$$

Dette er samme verdi som vi fant foran.

Vi skal nå utlede de to første formlene ved hjelp av figuren nedenfor, der de aktuelle størrelsene er tegnet inn. Mer at punktet *N* er nordpolen, slik at trekanten APN blir en sfærisk trekant.



Vi starter med å utlede formelen for distansen *d* på grunnlag av en cosinus-formel:

$$\cos d = \cos\left(90^\circ - b_P\right)\cdot\cos\left(90^\circ - b_A\right) + \sin\left(90^\circ - b_P\right)\cdot\sin\left(90^\circ - b_A\right)\cdot\cos l_f$$

$$= \underline{\underline{\sin b_P \cdot \sin b_A + \cos b_P \cdot \cos b_A \cdot \cos l_f}}$$

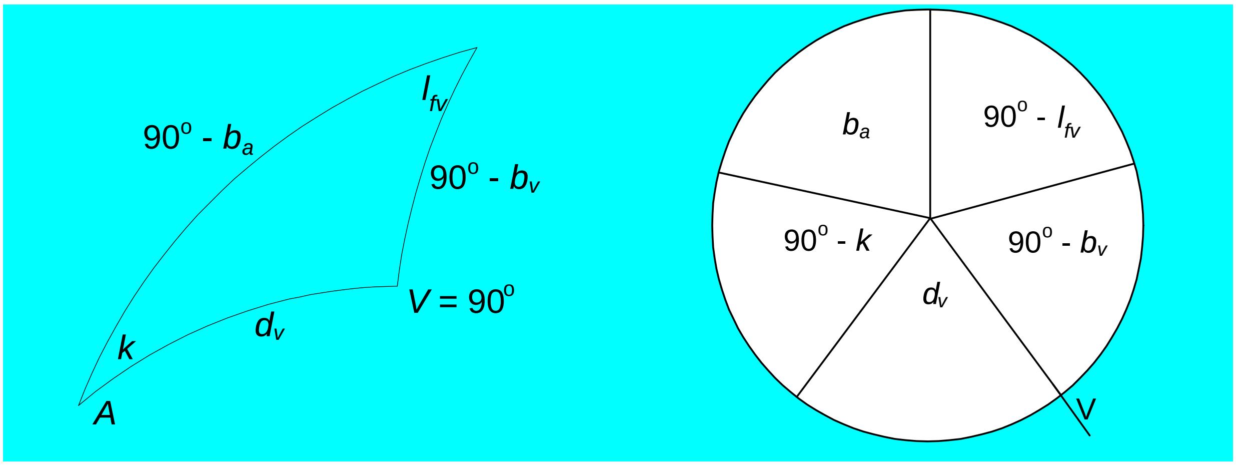
Dersom distansen *d* er kjent, kan formelen for kursen *k* utledes fra en sinus-setning:

$$\frac{\sin k}{\sin\left(90^\circ - b_p\right)} = \frac{\sin l_f}{\sin d} \quad \Leftrightarrow \quad \sin k = \frac{\sin l_f}{\sin d}\cdot\sin\left(90^\circ - b_P\right) = \underline{\underline{\frac{\sin l_f}{\sin d}\cdot\cos b_P}}\,.$$

Utledningen av den siste formelen der kursen *k* beregnes uten at vi kjenner distansen *d*, er mer omstendelig. Jeg har derfor dyttet denne utledningen ned i et vedlegg.

6. Vertex.

Når vi følger en storsirkel, er ***vertex*** det punktet på storsirkelen som er nærmest geografisk nordpol (eller sydpol). Da står storsirkelen vinkelrett på meridianen. På figuren nedenfor til venstre er A et vilkårlig punkt på storsirkelen (for eksempel avfarende punkt), k er kursen i A, V er vertex, d_v er distansen fra A til vertex, l_{fv} er lengdeforandringen fra A til vertex, mens b_a og b_v er breddegraden til henholdsvis A og vertex. Ved hjelp av en regel som kalles ***Napiers regel*** kan vi nå sette opp alle de sammenhengene vi ønsker mellom tre av de fem størrelsene k, d_v, l_{fv}, b_a og b_v.



Legg merke til sammenhengene mellom størrelsene i den sfæriske trekanten som har hjørner i A, V (vertex), og nordpolen, og sirkelen til høyre:

- De to størrelsene som er nærmest V beholdes uendret.
- De andre tre erstattes med $90^\circ -$størrelsen.

Nå ser Napiers regel slik ut:

Napiers regel: Ta utgangspunkt i hvilken som helst av de 5 sektorene i sirkelen. De to nabo-sektorene kalles ”tilliggende”, og de to andre sektorene kalles ”motstående”. Da gjelder:

Sinus til en sektor er lik produktet av tangensene til de to tilliggende sektorene.
Sinus til en sektor er lik produktet av cosinusene til de to motstående sektorene.

Husk da at:

$$\sin\left(90^\circ - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(90^\circ - x\right) = \sin x, \qquad \tan\left(90^\circ - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

Begrunnelsen for denne regelen finner du i et vedlegg om rettvinklede sfæriske trekanter.

Når vi kan bruke Napiers regel, er det egentlig ikke behov for formelsamling når vertex er med i bildet. I praksis kan det imidlertid være hensiktsmessig med standardformler for de mest brukte beregningene. Da forutsetter vi at avfarende bredde b_a og kurs k er kjent.

Vertex-bredde b_v***:*** Vi skal nå sette opp en sammenheng mellom b_v, b_a og kurs *k*. Av Napiers sirkel ser vi at $90^\circ - k$ og b_v er motstående sektorer til $90^\circ - b_v$. Napiers regel gir:

$$\sin\left(90^\circ - b_v\right) = \cos\left(90^\circ - k\right)\cdot\cos b_a \quad \Leftrightarrow \quad \cos b_v = \underline{\sin k\cdot\cos b_a}\,.$$

Lengdeforandring l_{fv} ***til vertex:*** Vi skal sette opp en sammenheng mellom l_{fv}, b_a og kurs *k*. Av Napiers sirkel ser vi at $90^\circ - l_{fv}$ og $90^\circ - k$ er tilliggende sektorer til b_a. Napiers regel gir:

$$\sin b_a = \tan\left(90^\circ - l_{fv}\right)\cdot\tan\left(90^\circ - k\right) = \frac{1}{\tan l_{fv}}\cdot\frac{1}{\tan k} \quad \Leftrightarrow \quad \tan l_{fv} = \underline{\frac{1}{\sin b_a}\cdot\frac{1}{\tan k}}\,.$$

Distanse d_v ***til vertex:*** Vi skal sette opp en sammenheng mellom d_v, b_a og kurs *k*. Av Napiers sirkel ser vi at b_a og d_v er tilliggende sektorer til $90^\circ - k$. Napiers regel gir:

$$\sin\left(90^\circ - k\right) = \tan b_a\cdot\tan d_v \quad \Leftrightarrow \quad \cos k = \tan b_a\cdot\tan d_v \quad \Leftrightarrow \quad \tan d_v = \underline{\frac{\cos k}{\tan b_a}}\,.$$

Merk at i de tre formlene vi har utledet, finner vi de ukjente størrelsene uttrykt ved de oppgitte størrelsene *k* og b_a. Men når vi først har beregnet b_v, kan vi også beregne l_{fv} og d_v uttrykt ved for eksempel b_v og b_a. Ulempen ved denne framgangsmåten er at eventuelle unøyaktigheter i beregningen av b_v vil forplante seg videre i beregningene.

Eksempel 5: Du befinner deg i et punkt *A* i posisjon $15^\circ\,\text{N}$, $10^\circ\,\text{E}$, med kurs 30°.

a) Bestem posisjonen til vertex for den storsirkelen som du seiler langs.
b) Finn distansen fra startpunktet til vertex langs denne storsirkelen.

Løsning:

a) Finner først vertex-bredden b_V. Vi vet at $k = 30^\circ$ og at $b_a = 15^\circ$. Av formelen ovenfor får vi:

$$\cos b_v = \sin k\cdot\cos b_a = \sin 30^\circ\cdot\cos 15^\circ = 0.4830 \quad \Leftrightarrow \quad b_v = \underline{\underline{61.1^\circ}}$$

For å finne vertex-lengden, må vi først finne forandret lengde fra startpunktet på grunnlag av de kjente størrelsene *k* og b_a. Av formelen ovenfor får vi:

$$\tan l_{fv} = \frac{1}{\tan k\cdot\sin b_a} = \frac{1}{\tan 30^\circ}\cdot\frac{1}{\sin 15^\circ} = 6.6921 \quad \Leftrightarrow \quad l_{fv} = \underline{81.5^\circ}$$

Deretter finner jeg lengdegraden til vertex ved å legge til lengdegraden til startpunktet:

$$10^\circ\,\text{E} + 81.5^\circ = \underline{\underline{91.5^\circ\,\text{E}}}\,.$$

b) For å finne distansen, benytter jeg at

$$\tan d_v = \frac{\cos k}{\tan b_a} = \frac{\cos 30^\circ}{\tan 15^\circ} = 3.2321 \quad \Leftrightarrow \quad d_v = \underline{\underline{72.8^\circ}}\,.$$

Som kontroll setter jeg opp sammenhengen mellom de tre størrelsene om jeg har funnet. Av Napiers sirkel ser jeg at d_v og $\left(90^\circ - l_{fv}\right)$ er tilliggende sektorer til $\left(90^\circ - b_v\right)$, slik at

$$\sin\left(90^\circ - b_v\right) = \tan d_v \cdot \tan\left(90^\circ - l_{fv}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos b_v = \frac{\tan d_v}{\tan l_{fv}}.$$

Nå er

$$\cos b_v = \cos 61.1^\circ = \underline{0.4833},$$

mens

$$\frac{\tan d_v}{\tan l_{fv}} = \frac{\tan 72.8^\circ}{\tan 81.5^\circ} = \underline{0.4828}.$$

Med de avrundingene som vi har foretatt, ser resultatet rimelig ut.

Eksempel 6: Bruk Napiers regel til å sette opp disse formlene:

a) En formel for distansen til vertex når du kjenner kurs og vertexbredden.

b) En formel for forandret lengde til vertex når du kjenner kurs og vertexbredden.

Løsning:

a) Jeg må først finne en sammenheng mellom distansen d_v til vertex, kursen *k*, og vertexbredden b_v. Av Napiers sirkel ser jeg at disse tre størrelsene befinner seg i tre nabo-sektorer. Napiers regel gir nå:

$$\sin d_v = \tan\left(90^\circ - k\right) \cdot \tan\left(90^\circ - b_v\right) = \frac{1}{\tan k} \cdot \frac{1}{\tan b_v} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{d_v = \arcsin\left(\frac{1}{\tan k} \cdot \frac{1}{\tan b_v}\right)}}.$$

b) Jeg må først finne en sammenheng mellom forandret lengde l_{fv} til vertex, kursen *k*, og vertexbredden b_v,. Av Napiers sirkel ser jeg at l_{fv} og b_v befinner seg i motstående sektorer til *k*. Napiers regel gir nå:

$$\sin\left(90^\circ - k\right) = \cos\left(90^\circ - b_v\right) \cdot \cos\left(90^\circ - l_{fv}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos k = \sin b_v \cdot \sin l_{fv}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin l_{fv} = \frac{\cos k}{\sin b_v} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{l_{fv} = \arcsin\left(\frac{\cos k}{\sin b_v}\right)}}$$

Merk at i begge disse formlene finner du egentlig bare sinus til den størrelsen du er ute etter. Dersom denne sinus-verdien ligger nær 1, kan det være vanskelig å avgjøre om du skal bruke en vinkel som er litt mindre enn 90° eller en vinkel som er litt større enn 90°.

Før vi avrunder, skal vi se nøyere på de tre formlene for b_v, l_{fv} og d_v uttrykt ved b_v og *k* som vi har funnet. Alle storsirkler som ikke faller sammen med ekvator har to vertex, ett på den nordlige og ett på den sørlige halvkulen. For å forenkle analysen, skal vi bestemme oss for at når vi snakker om *vertex*, er det vertex på samme halvkule som avfarende sted vi mener. Dermed får b_v og b_a alltid samme fortegn.

Vertex-bredde: $\cos b_v = \sin k \cdot \cos b_a$.
Siden både b_v og b_a er i området $\left[-90^\circ, 90^\circ\right]$, er cosinus-verdiene aldri negative. Derimot kan $\sin k$ bli negativ. For å få positiv verdi av $\cos b_v$, må vi derfor bruke absoluttverdien til $\sin k$. Videre får vi korrekt fortegn på b_v ved å sette

$$b_v = \operatorname{sgn}(b_a) \cdot \arccos\left(\left|\sin k\right| \cdot \cos b_a\right)$$

der $\operatorname{sgn}(b_a)$ betyr "fortegnet til b_a" (sgn = "signum").

Lengdeforandring til vertex: $\tan l_{fv} = \dfrac{1}{\sin b_a} \cdot \dfrac{1}{\tan k} \quad \Leftrightarrow \quad l_{fv} = \arctan\left(\dfrac{1}{\sin b_a} \cdot \dfrac{1}{\tan k}\right)$.
La oss se på fortegnet til l_{fv}. Vi vet at $\sin b_a$ er positiv på den nordlige halvkule og negativ på den sørlige. Videre vet vi at $\tan k$ er positiv når k ligger i 1. eller 3. kvadrant, d.v.s. når kursen er nordøst eller sørvest. Dette fører til at:

- Når avfarende sted og vertex ligger på den nordlige halvkule, er $\tan l_{fv} > 0$ når k ligger i 1. eller 3. kvadrant. Da ligger vertex øst for avfarende sted. Dersom k ligger i 2. eller 4. kvadrant, blir vertex vest for avfarende sted. Da er $\tan l_{fv} < 0$.
- Når avfarende sted og vertex ligger på den sørlige halvkule, er $\tan l_{fv} > 0$ når k ligger i 2. eller 4. kvadrant. Da ligger vertex øst for avfarende sted. Dersom k ligger i 1. eller 3. kvadrant, blir vertex vest for avfarende sted. Da er $\tan l_{fv} < 0$.

Vi ser at i begge tilfeller gir formelen at $l_{fv} \in \left\langle 0^\circ, 90^\circ \right\rangle$ når vertex ligger øst for avfarende sted, og at $l_{fv} \in \left\langle -90^\circ, 0^\circ \right\rangle$ når vertex ligger vest for avfarende sted.

Distanse til vertex: $\tan d_v = \dfrac{\cos k}{\tan b_a} \quad \Leftrightarrow \quad d_v = \arctan\left(\dfrac{\cos k}{\tan b_a}\right)$.
Vi tar en tilsvarende analyse som ovenfor:

- Når avfarende sted er på den nordlige halvkule, er $\tan b_a > 0$. Da er $\tan d_v > 0$ når $\cos k > 0$, d.v.s. når kursen er nordover (mot vertex). Er kursen sørover (bort fra vertex), blir $\tan d_v < 0$.
- Når avfarende sted er på den sørlige halvkule, er $\tan b_a < 0$. Da er $\tan d_v > 0$ når $\cos k < 0$, d.v.s. når kursen er sørover (mot vertex). Er kursen nordover (bort fra vertex), blir $\tan d_v < 0$.

I begge tilfellene ser vi at $d_v > 0$ når vi har kurs mot vertex, og at $d_v < 0$ når vi har kurs bort fra vertex.

Vi summerer opp:

$b_v = \operatorname{sgn}(b_a) \cdot \arccos\left(\left|\sin k\right| \cdot \cos b_a\right)$, positiv på den nordlige halvkule.

$l_{fv} = \arctan\left(\dfrac{1}{\sin b_a} \cdot \dfrac{1}{\tan k}\right)$, positiv når vertex er øst for avfarende sted.

$d_v = \arctan\left(\dfrac{\cos k}{\tan b_a}\right)$, positiv ved seiling mot vertex.

7. Storsirkelseilas.

Når du skal seile fra et avfarende punkt *A* til et påkommende punkt *P*, vil korteste strekning gå langs storsirkelen mellom disse punktene. (Vi forutsetter at det er fri seilingsled langs hele storsirkelen). Som navigatør vil du da starte med å beregne startkursen ved hjelp av tangens-formelen.

Men så begynner problemene:

Når du skal seile langs en storsirkel, må kursen hele tiden endres!!

Denne kursendringen kommer i tillegg til at kursen må korrigeres på grunn av avdrift (vind og strøm).

I praksis er det umulig å justere kursen hele tiden. Men med passe mellomrom må man kontrollere at man befinner seg på storsirkelen, og legge inn ny kurs etter behov. For å få det til, må man beregne ***mellompunkter*** på storsirkelen.

Hvor tett skal disse mellompunktene ligge? Hvor ofte må man kontrollere posisjon og justere kurs? Et nyttig hjelpemiddel er å beregne omtrentlig distanse til et punkt der kursen må justeres med for eksempel en grad. Slike beregninger blir omtrentlige, bl.a. fordi de ikke tar hensyn til avdrift.

7.1. Mellompunkter på storsirkelen.

Vi har ofte bruk for å kjenne ***mellompunkter*** på den storsirkelen vi seiler langs. Slike mellom-punkter kan settes opp på flere måter. Som eksempel skal se hvordan vi kan fastsette et mellompunkt *M* i en bestemt avstand d_{vm} fra vertex når vi kjenner lengde og bredde for vertex. Vi benytter de samme figurene som da vi fant sammenhenger mellom avfarende sted og vertex, bare med den forskjellen at vi nå snakker om et mellompunkt *M* istedenfor et avfarende sted *A*.

Først finner vi mellompunktets bredde, som vi skal kalle b_m. Av Napiers regel får vi at

$$\sin b_m = \cos d_{vm} \cdot \cos\left(90^\circ - b_v\right) = \underline{\cos d_{vm} \cdot \sin b_v}\,.$$

Siden både d_{vm} og b_v er kjent, kan vi nå finne b_a. Vi merker oss at så lenge mellompunktet og vertex ligger på samme side av ekvator blir $-90^\circ < d_{vm} < 90^\circ$ (hvorfor?) slik at $\cos d_{vm} > 0$, og b_m får samme fortegn som b_v. Men dersom mellompunktet og vertex ligger på hver sin side av ekvator blir $\cos d_{vm} < 0$ slik at b_m og b_v får motsatte fortegn. Ettersom sinus er entydig i området $\left[-90^\circ, 90^\circ\right]$, vil det ikke oppstå tvetydigheter.

For å finne mellompunktets lengde, starter vi med å finne dets lengdeforandring l_{fvm} til vertex. Siden både d_{vm} og b_v er kjent, bruker vi Napiers regel til å finne l_{fvm}:

$$\sin\left(90^\circ - b_v\right) = \tan d_{vm} \cdot \tan\left(90^\circ - l_{fvm}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos b_v = \tan d_{vm} \cdot \frac{1}{\tan l_{fvm}}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\tan l_{fvm} = \frac{\tan d_{vm}}{\cos b_v}}$$

Her er nevneren alltid positiv, slik at $\tan l_{fvm}$ får samme fortegn som $\tan d_{vm}$. Tangens er entydig i området $\left[-90^\circ, 90^\circ\right]$ slik at det ikke oppstår tvetydigheter dersom mellompunktet ligger på samme side av ekvator som vertex. Dersom mellompunktet og vertex ligger på hver sin side av ekvator, vil formelen gi en verdi av l_{fvm} som er 180° feil.

Vi summerer opp:

La b_m være bredden til et mellompunkt *M* på en storsirkel, l_{fvm} er lengdeforandring fra *M* til vertex, og d_{vm} strekningen fra *M* til vertex langs en storsirkel. Da er:

$$\sin b_m = \cos d_{vm} \cdot \sin b_v \qquad \text{og} \qquad \tan l_{fvm} = \frac{\tan d_{vm}}{\cos b_v}$$

Eksempel 7: I eksempel 5 hadde vi et avfarende punkt med bredde $b_a = 15^\circ$ og kurs $k = 30^\circ$. Vi fant at $b_v = 61.1^\circ$ og at $l_v = 91.5^\circ$. Videre var $d_v = 72.8^\circ$.

a) Finn koordinatene til et mellompunkt på storsirkelen der $d_{vm} = 70^\circ$.
b) Finn kursen i dette mellompunktet.

Løsning:

a) Finner først breddegraden til mellompunktet:

$$\sin b_m = \cos d_{vm} \cdot \sin b_v = \cos 70^\circ \cdot \sin 61.1^\circ = 0.2994 \quad \Leftrightarrow \quad b_m = \underline{\underline{17.4^\circ}}$$

Så var det lengdeforandringen:

$$\tan l_{fvm} = \frac{\tan d_{vm}}{\cos b_v} = \frac{\tan 70^\circ}{\cos 61.1^\circ} = 5.685 \quad \Leftrightarrow \quad l_{fvm} = \underline{80.0^\circ}$$

Lengdegraden blir da $91.5^\circ\text{E} - 80.0^\circ = \underline{\underline{11.5^\circ\text{E}}}$.

b) Lar nå vertex spille rollen som ”påkommende punkt”. Av tangensformelen får vi

$$\tan k = \frac{\sin l_f}{\tan b_P \cdot \cos b_A - \sin b_A \cdot \cos l_f}$$

$$= \frac{\sin 80.0^\circ}{\tan 61.1^\circ \cdot \cos 17.4^\circ - \sin 17.4^\circ \cdot \cos 80.0^\circ} = 0.5874$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \underline{\underline{30.4^\circ}}$$

Vi ser at kursen må økes med 0.4°.

7.2. Distanse til kursforandring.

I eksemplet over beregnet vi et mellompunkt etter at distansen til vertex var redusert fra den opprinnelige verdien på 72.8° til 70°, og fant at kursen måtte endres fra sin opprinnelige verdi på 30° til en ny verdi på 30.4°. Men valget av avstand fra startpunkt til mellompunkt var nokså vilkårlig. Kan vi finne kriterier for når det er nødvendig å beregne mellompunkter?

Et naturlig kriterium er at vi skal beregne mellompunkter når kursen bør endres med en bestemt størrelse Δk, for eksempel $\Delta k = 1^\circ$. I et vedlegg er det vist at:

Når vi seiler ut fra et punkt med bredde b_a med kurs *k*, må vi endre kursen med en størrelse Δk etter at vi her seilt en distanse Δd som tilnærmet er gitt ved

$$\Delta d \approx \left| \frac{\Delta k}{\sin k \cdot \tan b_a} \right| .$$

Merk at denne formelen bare gir en tilnærmet verdi. Grunnen er at formelen forutsetter at det seiles på *fast* kurs fram til kursendringen utføres. Dermed kommer du et lite stykke bort fra den storsirkelen som du burde fulgt. Jo større du velger Δk, jo større blir avviket fra stor-sirkelen. I praksis vil ikke dette avviket spille noen særlig rolle, fordi avdrift (vind og strøm) under alle omstendigheter vil påvirke kursen.

Eksempel 8: Beregn avstanden til 1° kursforandring med dataene fra Eksempel 5, der $b_a = 15^\circ$ og $k = 30^\circ$.

Løsning: Distansen til 1° kursforandring blir

$$\Delta d = \left| \frac{\Delta k}{\sin k \cdot \tan b_a} \right| = \left| \frac{1^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \tan 15^\circ} \right| = \underline{\underline{7.46^\circ}} .$$

Dette resultatet kan kontrolleres på flere måter. Det enkleste er å regne som om vi har fulgt en storsirkel hele veien, og bruke Napiers regel. Siden den opprinnelige distansen til vertex var 72.8°, er gjenværende distanse fra mellompunktet til vertex

$d_{vm} = 72.8^\circ - 7.46^\circ = 65.34^\circ$.

Kaller kursen i mellompunktet for k_m. Av Napiers regel får jeg

$$\sin d_{vm} = \tan\left(90^\circ - k_m\right)\cdot\tan\left(90^\circ - b_v\right) = \frac{1}{\tan k_m}\cdot\frac{1}{\tan b_v}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan k_m = \frac{1}{\sin d_{vm}}\cdot\frac{1}{\tan b_v} = \frac{1}{\sin 65.34^\circ}\cdot\frac{1}{\tan 61.1^\circ} = 0.6074 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k_m = 31.2^\circ}}$$

Jeg ser at kursen må endres med 1.2°, ikke bare med 1° som den skulle blitt ifølge formelen.

Jeg kan også regne som i Eksempel 7, og først finne koordinatene til mellompunktet.
Finner først breddegraden til mellompunktet:

$$\sin b_m = \cos d_{vm}\cdot\sin b_v = \cos 65.34^\circ\cdot\sin 61.1^\circ = 0.3653 \quad \Leftrightarrow \quad b_m = \underline{21.4^\circ}.$$

Så var det lengdeforandringen:

$$\tan l_{fvm} = \frac{\tan d_{vm}}{\cos b_v} = \frac{\tan 65.34^\circ}{\cos 61.1^\circ} = 4.507 \quad \Leftrightarrow \quad l_{fvm} = \underline{77.5^\circ}.$$

Av tangensformelen får vi

$$\tan k_m = \frac{\sin l_{fvm}}{\tan b_v\cdot\cos b_m - \sin b_m\cdot\cos l_{fvm}} = \frac{\sin 77.5^\circ}{\tan 61.1^\circ\cdot\cos 21.4^\circ - \sin 21.4^\circ\cdot\cos 77.5^\circ}$$
$$= 0.6073 \quad \Leftrightarrow \quad k_m = \underline{\underline{31.3^\circ}}$$

Hvis du synes at formelen over for å finne distansen til kursforandring er for unøyaktig, kan du lese videre. Nøkkelen til unøyaktigheten ligger i den store avstanden mellom avfarende bredde og bredden til mellompunktet. Se hva som skjer dersom vi erstatter b_a med gjennomsnittsverdien av avfarende bredde og bredden til mellompunktet:

$$\bar{b} = \frac{b_a + b_m}{2} = \frac{15^\circ + 21.4^\circ}{2} = 18.2^\circ.$$

Da blir

$$\Delta d = \left|\frac{\Delta k}{\sin k\cdot\tan\bar{b}}\right| = \left|\frac{1^\circ}{\sin 30^\circ\cdot\tan 18.2^\circ}\right| = \underline{\underline{6.08^\circ}}$$

slik at

$$d_{vm} = 72.8^\circ - 6.08^\circ = \underline{66.72^\circ}.$$

Brukes denne verdien i den første kontroll-formelen fra eksempel 8, får vi

$$\tan k_m = \frac{1}{\sin d_{vm}} \cdot \frac{1}{\tan b_v} = \frac{1}{\sin 66.72^\circ} \cdot \frac{1}{\tan 61.1^\circ} = 0.6010 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k_m = 31.00^\circ}}\,.$$

Dette var vel bedre?

La oss prøve å generalisere. Vi endrer formelen for Δd til

$$\Delta d \approx \left| \frac{\Delta k}{\sin k \cdot \tan\left(b_a + \Delta b\right)} \right|$$

der Δb er en korreksjon som svarer til halve breddeforandringen fra avfarende bredde til mellompunktets bredde. Nå er det ikke enkelt å finne denne størrelsen eksakt. Heldigvis er det heller ikke nødvendig. Det greier seg om vi finner et tilnærmet uttrykk for Δb. I vedlegget er det vist at

$$\Delta b \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta k}{\sin k \cdot \tan b_a} \right| \cdot \cos k$$

er en god tilnærmelse når vi ikke er for nær ekvator. Dersom du er nær ekvator, bør du bruke

$$\Delta b \approx \frac{1}{5} |v| \cdot \cos k$$

der *v* er skipets fart i knop.

Eksempel 9: Beregn avstanden til 1° kursforandring med dataene fra Eksempel 8.

Løsning: Vi er såpass langt vekk fra ekvator at vi bruker

$$\Delta b \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta k}{\sin k \cdot \tan b_a} \right| \cdot \cos k = \left| \frac{1^\circ}{2 \tan 15^\circ \cdot \sin 30^\circ} \right| \cos 30^\circ = \underline{3.2^\circ}\,.$$

Distansen til 1° kursforandring blir

$$\Delta d = \left| \frac{\Delta k}{\sin k \cdot \tan\left(b_a + \Delta b\right)} \right| = \left| \frac{1^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \tan\left(15^\circ + 3.2^\circ\right)} \right| = \underline{\underline{6.08^\circ}}\,.$$

Vi har allerede vist at denne verdien fører til et mellompunkt der kursforandringen er nøyaktig 1.00°.