Polynomdivisjon.

Du vet sikkert at et uttrykk av formen

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

er et polynom av *n*'te grad. For eksempel er uttrykket

$$2x^3 - x + 1$$

et tredjegradspolynom, mens et tall (for eksempel 4) alene kan oppfattes som et nulltegrads-polynom.

La oss gå rett på sak:

Dersom $P(x)$ og $Q(x)$ er to polynomer, der $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$, kan vi alltid skrive

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Her er $K(x)$ et polynom som vi kaller *kvotienten*, mens polynomet $R(x)$ kalles *divisjons-resten* og har lavere grad enn $Q(x)$.

Vi skal ikke bevise påstanden, men skal heller demonstrere hvordan vi går fram for å omforme brøker av formen

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

der $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$ til uttrykk av formen

$$K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Denne teknikken kalles ***polynomdivisjon***.

Eksempel 1: Utfør polynomdivisjonen

$$\frac{3x^3 - x^2 + 2x + 4}{x+2}.$$

Løsning: Jeg foretrekker et oppsett der jeg skriver brøken som en divisjon:

$$\left(3x^3 - x^2 + 2x + 4\right) : \left(x+2\right).$$

Så deler jeg $3x^3$ på x (som er høyeste potens i nevnerpolynomet), og får $3x^2$. Dette fører jeg slik:

$$\left(3x^3 - x^2 + 2x + 4\right) : \left(x+2\right) = 3x^2$$

Neste trinn er å multiplisere $3x^2$ med nevneren $x+2$, og skrive resultatet under teller-polynomet:

$$\left(3x^3 - x^2 + 2x + 4\right):\left(x+2\right) = 3x^2$$
$$3x^3 + 6x^2$$

Så trekker jeg $3x^3 + 6x^2$ fra det opprinnelige tellerpolynomet, slik at x^3-leddet forsvinner:

$$\begin{array}{l} \left(3x^3 - x^2 + 2x + 4\right):\left(x+2\right) = 3x^2 \\ \underline{-\left(3x^3 + 6x^2\right)} \\ \qquad -7x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

Nå gjentar jeg prosessen, ved at $-7x^2$ deles på x. Jeg får $-7x$, som skrives slik:

$$\begin{array}{l} \left(3x^3 - x^2 + 2x + 4\right):\left(x+2\right) = 3x^2 - 7x \\ \underline{-\left(3x^3 + 6x^2\right)} \\ \qquad -7x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

Deretter multipliseres $-7x$ med $x+2$, resultatet skrives nederst og trekkes fra slik at x^2-leddet forsvinner:

$$\begin{array}{l} \left(3x^3 - x^2 + 2x + 4\right):\left(x+2\right) = 3x^2 - 7x \\ \underline{-\left(3x^3 + 6x^2\right)} \\ \qquad -7x^2 + 2x + 4 \\ \quad \underline{-\left(-7x^2 - 14x\right)} \\ \qquad\qquad 16x + 4 \end{array}$$

Nå gjenstår det bare å dele $16x$ på x og få 16, multiplisere 16 med $x+2$, og trekke fra slik at x-leddet forsvinner:

$$\begin{array}{l} \left(3x^3 - x^2 + 2x + 4\right):\left(x+2\right) = 3x^2 - 7x + 16 \\ \underline{-\left(3x^3 + 6x^2\right)} \\ \qquad -7x^2 + 2x + 4 \\ \quad \underline{-\left(-7x^2 - 14x\right)} \\ \qquad\qquad 16x + 4 \\ \qquad\quad \underline{-\left(16x + 32\right)} \\ \qquad\qquad\quad -28 \end{array}$$

Nå er vi ved veis ende. Vi har vist at

$$\frac{3x^3 - x^2 + 2x + 4}{x+2} \equiv 3x^2 - 7x + 16 - \frac{28}{x+2}.$$

Jeg vil anbefale at du er nøye med å skrive ledd med samme potens under hverandre, slik at det er lett å holde oversikten. Om nødvendig kan du skyte inn 0-ledd slik som i neste eksempel:

Eksempel 2: Utfør polynomdivisjonen

$$\frac{2x^4+x^3-3x^2+3}{x^2-1}.$$

Løsning: Jeg skriver bare ned den fullstendige divisjonen uten å kommentere hver enkelt operasjon:

$$\begin{array}{l}
\left(2x^4+x^3-3x^2+0x+3\right):\left(x^2+0x-1\right)=2x^2+x-1\\
\underline{-\left(2x^4+0x^3-2x^2\right)}\\
\qquad\qquad x^3-x^2+0x+3\\
\qquad\underline{-\left(x^3+0x^2-x\right)}\\
\qquad\qquad\quad -x^2+x+3\\
\qquad\quad\underline{-\left(-x^2-0x+1\right)}\\
\qquad\qquad\qquad x+2
\end{array}$$

Resultatet blir altså:

$$\frac{2x^4+x^3-3x^2+3}{x^2-1}\equiv 2x^2+x-1+\frac{x+2}{x^2-1}.$$

Oppgave 1.

Vi sier at ***polynomdivisjonen går opp dersom restleddet*** $R(x)\equiv 0$. Da kan vi skrive

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv K(x) \quad\Leftrightarrow\quad P(x)\equiv K(x)\cdot Q(x).$$

Vi ser at polynomet $P(x)$ er blitt *faktorisert* i de to faktorene $K(x)$ og $Q(x)$.

Det er vanskelig å sette opp generelle kriterier for at en polynomdivisjon skal gå opp uten å utføre selve divisjonen. Men det er ett spesialtilfelle som er viktig, og som er forholdsvis lett å handtere:

Dersom $P(a)=0$, vil polynomdivisjonen $P(x):(x-a)$ gå opp.
Vi sier at $P(x)$ er delelig med $(x-a)$ eller at $(x-a)$ er faktor i $P(x)$.

Dette ser vi enkelt: Dersom divisjonen $P(x):(x-a)$ går opp, har vi

$$\frac{P(x)}{x-a}\equiv K(x) \quad\Leftrightarrow\quad P(x)\equiv K(x)\cdot(x-a).$$

Sett inn $x = a$ slik at $x - a = 0$. Hvis nå $P(a) = 0$, ser du at identiteten er oppfylt.

Eksempel 3: Undersøk om polynomet

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$$

har $(x-1)$, $(x+1)$ eller $(x-2)$ som faktor.

Bruk resultatet til å faktorisere $P(x)$.

Løsning: Regner ut $P(1)$, $P(-1)$ og $P(2)$, og får:

$$P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 + 3 = 4$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 3 = \underline{0} \text{ slik at } x - (-1) = x + 1 \text{ er faktor i } P(x).$$

$$P(2) = 2^3 - 2^2 + 2 + 3 = 9.$$

Vi ser at bare $P(-1) = 0$, slik at $P(x)$ kun er delelig med faktoren $x - (-1) = x + 1$.

Da kan vi utføre en polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - x^2 + x + 3) : (x+1) = \underline{x^2 - 2x + 3} \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\quad -2x^2 + x + 3 \\
\quad \underline{-(-2x^2 - 2x)} \\
\qquad\quad 3x + 3 \\
\qquad\quad \underline{-(3x + 3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Dette fører til at

$$x^3 - x^2 + x + 3 \equiv \underline{\underline{(x^2 - 2x + 3)(x+1)}}.$$

Eksemplet over illustrerer et vanlig problem: Du har et polynom av typen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

der a_0 er et helt tall, og skal prøve å finne eventuelle faktorer $x - a$ der a er et helt tall slik at $P(x)$ er delelig med $x - a$. Da kan du får bruk for setningen nedenfor:

Dersom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

skal være delelig med $x - a$ der a og a_0 er hele tall, må a være faktor i a_0.

Væpnet med setningen over kunne du med en gang sagt at i Eksempel 3 kan $x^3 - x^2 + x + 3$ umulig være delelig med $(x-2)$ fordi 2 ikke er faktor i $a_0 = 3$.

Eksempel 4: Faktoriser (om mulig) polynomet

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 .$$

Løsning: Vi ser at *a* kan være ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 eller ± 12 fordi alle disse tallene er faktorer i 12. Vi prøver oss fram:

$$P(1) = 1^4 - 2\cdot 1^3 - 7\cdot 1^2 + 8\cdot 1 + 12 = 12 .$$

$P(-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 - 7\cdot(-1)^2 + 8\cdot(-1) + 12 = 0$ slik at $x+1$ er faktor i $P(x)$.

$P(2) = 2^4 - 2\cdot 2^3 - 7\cdot 2^2 + 8\cdot 2 + 12 = 0$ slik at $x-2$ er faktor i $P(x)$.

Nå vet vi at $P(x)$ er delelig med

$$(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2 .$$

Vi utfører polynomdivisjonen:

$$\begin{aligned}
&(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x^2 - x - 2) = x^2 - x - 6 \\
&\underline{-(x^4 - x^3 - 2x^2)} \\
&\qquad -x^3 - 5x^2 + 8x + 12 \\
&\qquad \underline{-(-x^3 + x^2 + 2x)} \\
&\qquad\qquad -6x^2 + 6x + 12 \\
&\qquad\qquad \underline{-(-6x^2 + 6x + 12)} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Til slutt faktoriserer vi $x^2 - x - 6$ ved hjelp av formelen for løsing av andregradslikning:

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

slik at

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x-(-2)) = (x-3)(x+2).$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 6) \\
&= \underline{\underline{(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 2.