Løsing av likninger.

1. Enkle førstegradslikninger.

Å løse en likning består i å omforme den opprinnelige likningen til en ny likning som er så enkel at du direkte ser hvilke verdier av den ukjente som passer i likningen. Som hjelpemiddel har du da alle de operasjonene som er behandlet i notatene om *algebra* og *brøkregning*. Dessuten kan du:

- Multiplisere eller dividere hele likningen med et tall (unntatt null).
- Legge til eller trekke fra like mye på begge sider av likhetstegnet.

Det fins ingen generell strategi for hvordan du skal benytte disse teknikkene. Men dersom du legger til eller trekker fra ledd på begge sider av likhetstegnet på en fornuftig måte, er dette ekvivalent med å flytte ledd over på andre siden av likhetstegnet med motsatt fortegn. Du vil da samle alle ledd som inneholder den ukjente på den ene siden av likhetstegnet, og alle andre ledd på den andre siden.

Eksempel 1.1: Finn x uttrykt ved a når

$$2(a-x)+3x=a(x+3).$$

Løsning: Ganger ut parentesene, og samler alle ledd med x på venstre side av likhetstegnet:

$$\begin{aligned}
&2(a-x)+3x=a(x+3)\\
\Leftrightarrow\quad &2a-2x+3x=ax+3a\\
\Leftrightarrow\quad &-2x+3x-ax=-2a+3a\\
\Leftrightarrow\quad &x-ax=a\\
\Leftrightarrow\quad &x(1-a)=a\\
\Leftrightarrow\quad &\underline{\underline{x=\frac{a}{1-a}}}
\end{aligned}$$

[Oppgave 1.1]().

Når likningen inneholder en eller flere brøker, og den ukjente forekommer i nevner, er det ofte lurt å gange hele likningen med fellesnevneren for alle brøkene:

Eksempel 1.2*:* Finn x uttrykt ved a når

$$\frac{2a}{1-x}=\frac{a+1}{x+2}.$$

Løsning: Begge sider av likningen multipliseres med fellesnevneren $(1-x)(x+2)$, og vi får:

$$\begin{aligned}
&\frac{2a}{\cancel{1-x}}\cancel{(1-x)}(x+2)=\frac{a+1}{\cancel{x+2}}(1-x)\cancel{(x+2)}\\
\Leftrightarrow\quad &2a(x+2)=(a+1)(1-x)\\
\Leftrightarrow\quad &2ax+4a=a-ax+1-x
\end{aligned}$$

Så samles alle x-leddene på høyre side av likhetstegnet:

$$2ax + ax + x = -4a + a + 1$$
$$(3a+1)x = -3a + 1$$
$$\underline{\underline{x = \frac{-3a+1}{3a+1}}}$$

(Vanlig slurvefeil: Minustegnet i leddet $-3a$ synker ned foran brøkstreken, slik at svaret ser ut som $x = -\frac{3a+1}{3a+1}$ som da kan forkortes til $x = -1$).

Oppgave 1.2.

Merk: Det er kun når du har en *likning* at du kan multiplisere begge sider av likhetstegnet med fellesnevneren (eller med et hvilket som helst tall for den saks skyld). Når du skal forenkle uttrykk som inneholder brøker, kan du *ikke* multiplisere uttrykkene med fellesnevneren. Hvis du for eksempel skal forenkle uttrykket

$$\frac{2a}{1-x} - \frac{a+1}{x+2},$$

kan du *ikke* multiplisere med $(1-x)(x+2)$. Du må gjøre slik:

$$\frac{2a}{1-x} - \frac{a+1}{x+2} = \frac{2a(x+2)-(a+1)(1-x)}{(1-x)(x+2)} = \frac{2ax+4a-a+ax-1+x}{(1-x)(x+2)}$$
$$= \underline{\underline{\frac{3ax+x-3a-1}{(1-x)(x+2)}}}$$

Du får ofte bruk for å omforme uttrykk. Da bruker du de samme teknikkene som når du løser likninger. Her er et par eksempler:

Eksempel 1.3: Når en partikkel har startfart v_0 og akselerasjon a, vil den i løpet av en tid t bevege seg en strekning x gitt ved

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 .$$

Omform dette uttrykket slik at du finner

a) v_0 uttrykt ved de andre størrelsene.

b) a uttrykt ved de andre størrelsene.

Løsning:

a) $x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 t = x - \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \underline{\underline{\frac{x-\frac{1}{2}at^2}{t}}} = \frac{x}{t} - \frac{\frac{1}{2}at^2}{t} = \underline{\underline{\frac{x}{t} - \tfrac{1}{2}at}}\,.$

b) $x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}at^2 = x - v_0 t\,.$

Multipliserer begge sider av likhetstegnet med 2, og deler på t^2:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}at^2 \cdot 2}{t^2} = \frac{(x-v_0t)\cdot 2}{t^2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \underline{\underline{\frac{2(x-v_0t)}{t^2}}} = \underline{\underline{\frac{2x}{t^2} - \frac{2v_0}{t}}}\,.$$

Eksempel 1.4: Når to motstander med resistanser R_1 og R_2 koples i parallell, får vi en resultantresistans R gitt ved

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Finn R_1 uttrykt ved R og R_2.

Løsning: Starter med å multiplisere hele brøken med R, R_1 og R_2:

$$\frac{1}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R} \cdot R_1 \cdot R_2 = \frac{1}{\cancel{R_1}} \cdot R \cdot \cancel{R_1} \cdot R_2 + \frac{1}{\cancel{R_2}} \cdot R \cdot R_1 \cdot \cancel{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 \cdot R_2 = R \cdot R_2 + R \cdot R_1$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_1 = R \cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 \left(R_2 - R\right) = R \cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \quad R_1 = \underline{\underline{\frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}}}$$

Oppgave 1.3.

2. Andregradslikninger.

Disse likningene løses vanligvis med formel. De må da først ordnes slik at de får standard-formen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Deretter benytter vi at:

Dersom $a \neq 0$, har likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

løsningen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Eksempel 2.1: Løs likningene

a) $3x^2 + 2x - 4 = 0$.

b) $5x = 4 + x^2$

Løsning:

a) Benytter formelen direkte:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$= \frac{2\left(-1 \pm \sqrt{13}\right)}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}}}$$

b) Starter med å ordne likningen til standardformen:

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Nå kan vi bruke formel:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{4}} \\ \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

Noen ganger er det enklere å benytte at:

> Når et produkt er lik null, må minst en av faktorene være lik null.

Eksempel 2.2: Løs disse likningene uten å bruke formel:

a) $x^2 - 4 = 0$.

b) $x^2 - 3x = 0$.

Løsning:

a) Benytter 3. kvadratsetning:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}} \\ x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -2}} \end{cases}$$

b) Setter x utenfor parentes:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \underline{\underline{x = 0}} \\ x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 3}} \end{cases}$$

Advarsel: Når du løser likninger, må du **ikke** forkorte bort en faktor som inneholder x. Da mister du en løsning.

Oppgave 2.1.

3. Mer faktorisering.

I de siste eksemplene ovenfor brukte du faktorisering til å løse en andregradslikning. Men du kan også gå motsatt vei slik:

> Dersom likningen
> $$ax^2 + bx + c = 0$$
> har løsningene
> $$x = x_1 \text{ og } x = x_2,$$
> så er
> $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dette kan vi bruke til å faktorisere andregradsuttrykk slik eksemplene nedenfor viser:

Eksempel 3.1: Faktoriser uttrykket
a) $2x^2 - 6x + 4$.
b) $a^2 + ab - 2b^2$

Løsning:
a) Likningen
$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$
har løsningene
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}.$$
Da er
$$2x^2 - 6x + 4 = \underline{\underline{2(x-2)(x-1)}}.$$

b) Denne er litt finurlig. Men hvis vi betrakter a som en ukjent i andregradslikningen
$$a^2 + ab - 2b^2 = 0,$$
kan vi finne a uttrykt ved b:
$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2b^2)}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 8b^2}}{2} = \frac{-b \pm 3b}{2} = \begin{cases} \frac{-b+3b}{2} = \frac{2b}{2} = b \\ \frac{-b-3b}{2} = \frac{-4b}{2} = -2b \end{cases}$$
Altså er
$$a^2 + ab - 2b^2 = (a-b)(a-(-2b)) = \underline{\underline{(a-b)(a+2b)}}.$$

Dette kan være nyttig ved forkorting, slik neste eksempel viser:

Eksempel 3.2: Forkort brøken
$$\frac{2x^2 + 2x - 12}{3x^2 - 12}.$$

Løsning: For å kunne faktorisere telleren, benytter jeg at likningen
$$2x^2 + 2x - 12 = 0$$
har løsningene
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-2 \pm 10}{4} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}.$$
Nevneren faktoriseres ved å sette 3 utenfor parentes, etterfulgt av 3. kvadratsetning. Da er
$$\frac{2x^2 + 2x - 12}{3x^2 - 12} = \frac{2(x-2)(x-(-3))}{3(x^2 - 4)} = \frac{2\cancel{(x-2)}(x+3)}{3(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{2(x+3)}{3(x+2)} = \underline{\underline{\frac{2x+6}{3x+6}}}.$$

Oppgave 3.1.

4. System av to førstegradslikninger.

Dette er likningssystem som består av to førstegradslikninger med to ukjente. Det er flere metoder for å løse slike likningssett. De to vanligste er:

Innsettingsmetoden: Løs ut den ene ukjente av en av likningene, og sett inn i den andre likningen. Da får du en vanlig førstegradslikning med en ukjent. Når denne er funnet, er det lett å finne den andre ukjente.

Addisjonsmetoden: Denne metoden går ut på kvitte seg med den ene ukjent ved å legge sammen de to likningene, eventuelt etter å ha multiplisert en eller begge likningene med et hensiktsmessig tall. Da står vi igjen med *en* likning med *en* ukjent. Vi løser denne likningen. Deretter finner vi den andre ukjente ved å sette inn i en av likningene.

Vi ser på et par eksempler:

Eksempel 4.1: Løs disse likningssystemene både ved innsettings- og addisjonsmetoden:

a) $2x - y = 3$
$x + y = 9$

b) $2x - 3y = 7$
$3x + 2y = 4$

Løsning:

a) Når vi bruker innsettingsmetoden, kan vi for eksempel starte med å løse ut y av den siste likningen:

$$x + y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad y = 9 - x\,.$$

Så settes dette inn i den første likningen, og vi får:

$$2x - (9 - x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 9 + x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 4}\,.$$

Vi nøster oss tilbake, og får at

$$y = 9 - x = 9 - 4 = \underline{5}\,.$$

Løsningen blir da tallparet $(x, y) = \underline{\underline{(4,5)}}$.

Når vi benytter addisjonsmetoden, kan vi bare legge sammen likningene direkte. Da faller y-leddene bort, og vi får:

$$(2x - y) + (x + y) = 3 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 4}\,.$$

Denne verdien setter vi inn i den siste likningen, og får

$$4 + y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad y = 9 - 4 = \underline{5}\,.$$

b) Når jeg bruker innsettingsmetoden, er det kanskje enklest å løse ut x av den første likningen, og deretter sette inn i den andre:

$$2x - 3y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 3y + 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3}{2}y + \tfrac{7}{2}\,.$$

$$3x + 2y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(\tfrac{3}{2}y + \tfrac{7}{2}\right) + 2y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{9}{2}y + \tfrac{21}{2} + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{9}{2}y + 2y = 4 - \tfrac{21}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{13}{2}y = \tfrac{-13}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y = -1}$$

Til slutt blir

$$x = \tfrac{3}{2}y + \tfrac{7}{2} = \tfrac{3}{2}\cdot(-1) + \tfrac{7}{2} = \tfrac{4}{2} = \underline{2}\,.$$

Løsningen blir da tallparet $(x, y) = \underline{\underline{(2,-1)}}$.

Når jeg bruker addisjonsmetoden, ser det ut til å være enklest å bli kvitt y-leddene. Da må jeg multiplisere den øverste likningen med 2 og den nederste med 3 før jeg legger sammen likningene:

$$\begin{aligned}(2x-3y)\cdot 2 &= 7\cdot 2 \\ (3x+2y)\cdot 3 &= 4\cdot 3\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned}4x-6y &= 14 \\ 9x+6y &= 12\end{aligned}$$

Når likningene legges sammen, får jeg

$$13x = 26 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\,.$$

Så finner jeg y av for eksempel den øverste likningen:

$$2x-3y=7 \quad \Leftrightarrow \quad -3y = 7-2x = 7-2\cdot 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y=-1}.$$

Oppgave 4.1.

Du kommer ofte bort i slike likningssystem med mer enn to ukjente. Selv om du kan benytte de samme metodene som ovenfor, er det utviklet mer generelle metoder til å løse slike likningssystem. Vi skal ikke komme inn på slike metoder i denne korte innføringen.

5. System av høyere ordens likninger.

Dette er et område som kanskje går litt lenger enn det som forventes av et lite repetisjonskurs. Men det inneholder egentlig ingenting nytt. Vi skal bare benytte kunnskaper som vi allerede har fra før. Dessuten må vi jobbe systematisk. Vi må også huske på at løsningen av et slikt likningssystem er et tall*sett* som skal inneholde en verdi for hver av de ukjente, slik at alle likningene i settet er oppfylt.

Vi skal begrense oss til to likninger med to ukjente.

Eksempel 5.1: Finn x og y av likningssystemene nedenfor:

a) $$\begin{aligned}x^2-2xy &= 0 \\ 2x+y &= 5\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}x^2 &= 4y^2 \\ xy-4y+6x &= 0\end{aligned}$$

Løsning:

a) Her er det flere mulige strategier. Det enkleste er kanskje å starte med å faktorisere den øverste likningen:

$$x^2-2xy=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2y)=0\,.$$

Så benytter vi at når et produkt er lik null, må en av faktorene være lik null. Det gir disse to mulighetene:

$$x=\underline{0} \text{ eller } x-2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{2y}\,.$$

Hittil har vi bare sørget for at den første likningen er oppfylt. Men den andre likningen må også være oppfylt *samtidig*. Vi må derfor se på to muligheter:

Dersom $x=0$, blir den andre likningen

$$2\cdot 0+y=5 \quad \Leftrightarrow \quad y=\underline{5}.$$

Dette gir løsningen

$$(x,y)=\underline{\underline{(0,5)}}.$$

Den andre muligheten er at $x=2y$. Settes dette inn i den siste likningen, får vi

$$2\cdot 2y+y=5 \quad\Leftrightarrow\quad 4y+y=5 \quad\Leftrightarrow\quad 5y=5 \quad\Leftrightarrow\quad y=\underline{1}.$$

Da blir

$$x=2y=2\cdot 1=\underline{2}.$$

Dette gir løsningen

$$(x,y)=\underline{\underline{(2,1)}}.$$

En annen strategi er å løse ut y av den siste likningen, og deretter sette inn i den første. Da får vi:

$$2x+y=5 \quad\Leftrightarrow\quad y=5-2x.$$

Innsetting i den første likningen gir

$$x^2-2x(5-2x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-10x+4x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5x^2-10x=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 5x(x-2)=0$$

Merk at vi kan ikke forkorte bort x. Gjør vi det, mister vi en løsning.
Nå har vi to muligheter: $x=0$ eller $x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=2$.

Dersom $x=\underline{0}$, blir

$$y=5-2\cdot 0=\underline{5},$$

som gir løsningen

$$(x,y)=\underline{\underline{(0,5)}}.$$

Dersom $x=\underline{2}$, blir

$$y=5-2\cdot 2=\underline{1},$$

som gir løsningen

$$(x,y)=\underline{\underline{(2,1)}}.$$

b) Her lønner det seg å starte med den øverste likningen:

$$x^2=4y^2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\underline{\pm 2y}.$$

Så setter vi inn i den nederste likningen:
Dersom $x=2y$, får vi

$$(2y)y-4y+6\cdot 2y=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2y^2-4y+12y=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2y^2+8y=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2y(y+4)=0$$

Her er enten $y=0$ eller $y+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=-4$.
Da blir

$$x=2y=\begin{cases} 2\cdot 0=\underline{0} \\ 2\cdot(-4)=\underline{-8} \end{cases}$$

Vi har altså funnet to løsninger:

$$(x,y)=\underline{\underline{(0,0)}} \text{ eller } (x,y)=\underline{\underline{(-8,-4)}}.$$

Dersom $x=-2y$, får vi

$$(-2y)y-4y+6\cdot(-2y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -2y^2-4y-12y=0 \quad\Leftrightarrow\quad -2y^2-16y=0$$

$$\Leftrightarrow\quad -2y(y+8)=0$$

Her er enten $y = 0$ eller $y + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -8$.
Da blir

$$x = 2y = \begin{cases} 2 \cdot 0 = \underline{0} \\ 2 \cdot (-8) = \underline{-16} \end{cases}$$

Løsningen $(x, y) = (0,0)$ har vi fra før. Men vi har funnet en ny løsning:

$$(x, y) = \underline{\underline{(-16, -8)}}.$$

Oppgave 5.1.

6. Ulikheter.

Førstegrads-ulikheter løses med stort sett de samme regneteknikker som førstegradslikninger. Det er imidlertid ett viktig unntak:

Når du multipliserer begge sider av en ulikhet med et negativt tall, må du snu ulikhetstegnet.

En konsekvens av dette er at:

Du kan ikke multiplisere begge sider av en ulikhet med en faktor som du ikke vet fortegnet til.

Et lite eksempel:

Eksempel 6.1: Løs ulikheten

$$2(x-1) - x < 1 - 3(3-x).$$

Løsning: Bruker samme teknikker som når jeg løser en likning:

$$2(x-1) - x < 1 - 3(3-x)$$
$$2x - 2 - x < 1 - 9 + 3x$$
$$2x - x - 3x < 2 + 1 - 9$$
$$-2x < -6$$
$$\underline{\underline{x > 3}}$$

Merk at jeg må snu ulikhetstegnet når jeg deler på -2 i siste linje.

Oppgave 6.1.

Ikke fall for fristelsen til å forkorte bort eller multiplisere med faktorer som inneholder *x*! Dette går sjelden bra, fordi vi kjenner (vanligvis) ikke fortegnet til slike faktorer, og da vet vi heller ikke hvilken vei ulikhetstegnet skal stå. Dette fører til at ulikheter som inneholder potenser av *x*, og ulikheter der en eller flere nevnerfaktorer inneholder *x*, må behandles med forsiktighet. Prosedyren i ramma nedenfor anbefales:

Ulikheter med brøkfunksjoner som har *x* i nevner, eller ulikheter som inneholder potenser av *x*, løses slik:

1. Alle ledd samles på venstre side av ulikhetstegnet.
2. Venstre side faktoriseres.
3. Sett opp et ***fortegnsskjema*** der hver faktor får sin fortegnslinje. Bruk hel strek når faktoren er positiv, stiplet strek når faktoren er negativ.
4. Sett opp fortegnslinja for hele venstre side av ulikheten ved å benytte at 0, 2, 4, ... negative faktorer blir positivt, mens 1, 3, 5, ... negative faktorer blir negativt.
5. Se av oppgaveteksten om venstre side skal være positiv eller negativ, og skriv ned svaret ut fra fortegnslinja.

Dette må illustreres med et par eksempler:

Eksempel 6.2: Løs ulikhetene

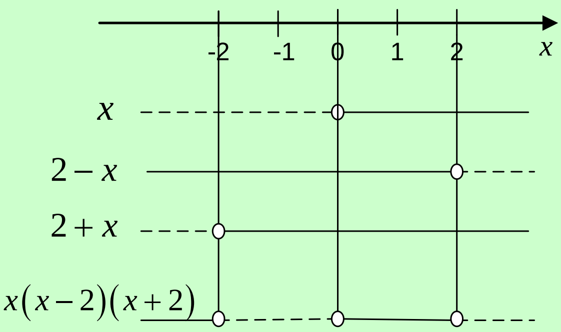
a) $4x < x^3$.

b) $\dfrac{x}{x-2} \geq 3$.

Løsning:

a) Du må ikke forkorte bort *x*! Slik forkorting innebærer egentlig at du dividerer med *x*, og du vet jo ikke om *x* er positiv eller negativ. Da vet du heller ikke hvilken vei ulikhets-tegnet skal stå etter forkortingen. Vi må gjøre slik:

$$4x < x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - x^3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(4 - x^2\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2-x)(2+x) < 0 .$$



Nå må vi sette opp fortegnsskjema med en linje for hver faktor, der en hel strek markerer positiv faktor mens stiplet strek markerer negativ faktor. Da kan vi bli lurt av faktoren $(2-x)$, som får hel strek når

$$2 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2 .$$

Ellers er

$$x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -2 .$$

Hele fortegnsskjemaet blir da som vist ovenfor. Vi leser av:

$$x(2-x)(2+x) < 0 \text{ når } \underline{\underline{-2 < x < 0}} \text{ eller når } \underline{\underline{x > 2}} .$$

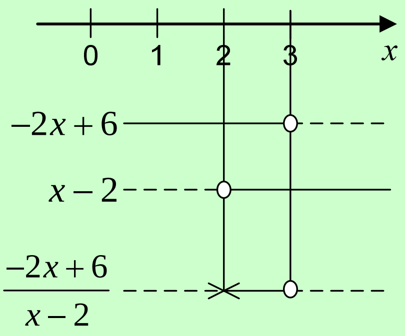
b) Her kan du ikke multiplisere begge sider med $(x-2)$, fordi du ikke vet om denne faktoren er positiv eller negativ. Du flytter heller alle leddene over på venstre side av ulikhetstegnet, og setter alt opp på felles brøkstrek:

$$\frac{x}{x-2} - 3 \cdot \frac{x-2}{x-2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 3x + 6}{x-2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x+6}{x-2} \geq 0$$

Så undersøker du når hver faktor er positiv:

$$-2x + 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x < 3} .$$

$$x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x > 2} .$$



Disse resultatene samles i fortegnsskjemaet til venstre. Merk at vi ikke kan bruke $x = 2$ fordi vi da får null i nevneren. Videre skal vi finne de x-verdiene som fører til at brøken er større enn *eller lik* null. Av fortegns-skjemaet ser vi at dette er oppfylt når

$$\underline{\underline{2 < x \le 3}}.$$

Oppgave 6.2.