Kvadratrøtter.

Du husker sikkert de grunnleggende reglene for kvadratrøtter, men for sikkerhets skyld skal jeg føre opp de viktigste reglene her:

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$
$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Nedenfor ser du noen enkle eksempler på bruken av disse reglene:

Eksempel 1: Skriv disse uttrykkene enklere:

a) $\sqrt{9x^2}$

b) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}$

c) $\sqrt{\frac{x^2 y}{4y^3}}$

d) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{27}$

Løsning:

a) $\sqrt{9x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = \underline{\underline{3x}}$.

b) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x} = \sqrt{2x \cdot 8x} = \sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} = \underline{\underline{4x}}$.

c) $\sqrt{\frac{x^2 y}{4y^3}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{\frac{y}{y^3}} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{y^2}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{2y}$.

d) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{27} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{27} = \frac{\sqrt{3 \cdot 27}}{2} = \frac{\sqrt{81}}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$.

Oppgave 1.

Sammentrekking av flerleddede uttrykk med kvadratrøtter følger vanlige regneregler, og bør gå uten særlige problemer:

Eksempel 2: Trekk sammen uttrykkene nedenfor:

a) $\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)+\left(x+1\right)$

b) $\left(2\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)-\sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}\right)$

Løsning:

a) $\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)+\left(x+1\right) = \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)^2 + x + 1 = \sqrt{x} - x + x + 1 = \underline{\underline{\sqrt{x}+1}}$.

b) $$\left(2\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)-\sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}\right)=2\left(\sqrt{x}\right)^2+4\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6-\sqrt{x}-2\left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$=2x+4\sqrt{x}-3\sqrt{x}-6-\sqrt{x}-2x=\underline{\underline{-6}}$$

Oppgave 2.

Etter denne innledningen skal vi trekke sammen brøker som inneholder kvadratrøtter. Det mest systematiske er da å finne fellesnevneren for de brøkene som inngår, skrive alle brøkene med denne fellesnevneren som nevner, trekke sammen, og om mulig forenkle svaret til slutt. Men noen ganger kan vi få enklere regninger ved å forenkle brøker underveis, slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 3: Trekk sammen brøkene nedenfor, og skriv svaret så enkelt som mulig:

a) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

b) $\dfrac{2\sqrt{x}+x}{x}-\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Løsning:

a) Fellesnevneren er $\sqrt{x}$, slik at vi kan skrive

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x+1-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x}}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}}}}.$$

Vi kan også starte med å forenkle den første brøken:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}\cdot\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

b) Fellesnevneren blir $x=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$, slik at vi kan skrive

$$\frac{2\sqrt{x}+x}{x}-\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+x}{x}-\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+x}{x}-\frac{\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2}{x}$$
$$=\frac{\left(2\sqrt{x}+x\right)-\left(\sqrt{x}+x\right)}{x}=\frac{2\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-x}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

Dersom vi starter med å forenkle leddene, får vi:

$$\frac{2\sqrt{x}+x}{x}-\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\left(\frac{2\sqrt{x}}{x}+\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}\right)=\left(\frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot\cancel{\sqrt{x}}}+1\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{x}}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

Oppgave 3.

Nå vil jeg benytte anledningen til å komme med en advarsel. Nedenfor har jeg satt opp og krysset over to "regneregler" som ***ikke*** gjelder, selv om mange studenter tror at de gjelder:

$$\cancel{\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}} \qquad \cancel{\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

Jeg skal illustrere dette med et par eksempler:

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, mens $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$.
$\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$, mens $\sqrt{13^2}-\sqrt{12^2}=13-12=1$.

La oss heller se på regneregler som virkelig gjelder. Heldigvis trenger vi ikke å presentere noen nye regneregler. Det eneste vi må gjøre, er å benytte regler som vi allerede kjenner. I praksis innebærer dette at vi (om mulig) må faktorisere radikanden slik eksemplene nedenfor viser.

Eksempel 4: Skriv rotuttrykkene nedenfor så enkelt som mulig:

a) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4x^2-16}$

b) $\dfrac{\sqrt{a^4-2a^2b}}{\sqrt{a^2b^2-2b^3}}$

Løsning:

a) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4x^2-16}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\left(x^2-4\right)}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{x^2-4}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{x^2-4}=\underline{\underline{\sqrt{x^2-4}}}$.

b) $\dfrac{\sqrt{a^4-2a^2b}}{\sqrt{a^2b^2-2b^3}}=\dfrac{\sqrt{a^2\left(a^2-2b\right)}}{\sqrt{b^2\left(a^2-2b\right)}}=\dfrac{\sqrt{a^2}\cdot\cancel{\sqrt{a^2-2b}}}{\sqrt{b^2}\cdot\cancel{\sqrt{a^2-2b}}}=\underline{\underline{\dfrac{a}{b}}}$.

Oppgave 4.

I Eksempel 4b ovenfor måtte du faktorisere under rottegnene både i teller og nevner før du kunne forkorte. Noen ganger er slik faktorisering og forkorting mer krevende:

Eksempel 5: Faktoriser teller og nevner i disse brøkene, og forkort deretter brøkene:

a) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

b) $\dfrac{\sqrt{x^3-4x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

Løsning:

a) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\cancel{\left(\sqrt{x}+2\right)}}{\cancel{\sqrt{x}+2}}=\underline{\underline{\sqrt{x}-2}}$.

b) $\dfrac{\sqrt{x^3-4x}}{\sqrt{x^2+2x}}=\dfrac{\sqrt{x(x^2-4)}}{\sqrt{x(x+2)}}=\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x^2-2^2}}{\cancel{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+2}}=\dfrac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{\cancel{\sqrt{x+2}}\cdot\sqrt{x-2}}{\cancel{\sqrt{x+2}}}=\underline{\underline{\sqrt{x-2}}}$.

Oppgave 5.

Til slutt skal vi se på sammentrekking av brøker som inneholder kvadratrotuttrykk. Da får vi bruk for alle de teknikkene som vi har sett på hittil.

Eksempel 6: Trekk sammen brøkene nedenfor, og skriv svarene så enkelt som mulig:

a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$

c) $\sqrt{x^3+4x^2}-\dfrac{4x}{\sqrt{x+4}}$

Løsning:

a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot x}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{(1+x^2)-x^2}{x\sqrt{1+x^2}}=\underline{\underline{\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{2}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{2+(x-2)}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}=\underline{\underline{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}}}$

c) $\sqrt{x^3+4x^2}-\dfrac{4x}{\sqrt{x+4}}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x+4}-\dfrac{4x}{\sqrt{x+4}}=x\sqrt{x+4}\cdot\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}-\dfrac{4x}{\sqrt{x+4}}$

$$=\frac{x(x+4)-4x}{\sqrt{x+4}}=\underline{\underline{\frac{x^2}{\sqrt{x+4}}}}$$

Oppgave 6.