Delbrøkoppspalting.

Du vet sikkert hvordan vi kan legge sammen flere brøker med ulike nevnere til en brøk med fellesnevner. Delbrøkoppspalting er det motsatte: vi starter med en brøk der nevneren er et produkt av flere faktorer, og spalter den opp i en sum av flere brøker der hver brøk har enklest mulig nevner. I dette lille notatet skal jeg gi en oversikt over hvordan vi går fram for å foreta en delbrøkoppspalting.

1. Faktorisering av nevneren.

Vi må starte med en brøk der både teller og nevner er polynomer i den frie variable (heretter kalt *x*), og tellerpolynomet er av lavere grad enn nevnerpolynomet. Vår første deloppgave er da å faktorisere nevnerpolynomet.

Vi vet at et polynom alltid lar seg faktorisere i reelle første- eller andregradsfaktorer. Ved faktoriseringen går vi vanligvis fram slik:

1. Se etter felles faktorer som kan settes utenfor parentes.
2. Undersøk om 3. kvadratsetning kan brukes: $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$.
3. Dersom andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$ har to reelle røtter $x = x_1$ og $x = x_2$, kan $ax^2 + bx + c$ faktoriseres til $a(x - x_1)(x - x_2)$.
4. Dersom du ser at et tredjegradspolynom blir lik null når $x = x_1$, kan polynomet deles på $x - x_1$ slik at du får et andregradspolynom som kan faktoriseres som angitt ovenfor.

Eksempel 1.1: Faktoriser disse polynomene:

a) $x^3 - 3x^2 + 2x$.
b) $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$.
c) $x^4 - 8x^2 + 16$.
d) $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.
e) $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$.

Løsning:

a) Vi starter med å sette *x* utenfor parentes:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x\left(x^2 - 3x + 2\right).$$

Så løser vi andregradslikningen

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 2\cdot 4}}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Da er

$$x^3 - 3x^2 + 2x = \underline{\underline{x(x-2)(x-1)}}.$$

b) Vi starter med å sette x^2 utenfor parentes:

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2\left(2x^2 + 3x - 2\right).$$

Så løser vi andregradslikningen

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

Da er

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2 \cdot 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - (-2)\right) = \underline{\underline{x^2(2x-1)(x+2)}}.$$

c) Det gitte polynomet kan faktoriseres ved hjelp av 2. kvadratsetning slik:

$$x^4 - 8x^2 + 16 = \left(x^2\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2 = \left(x^2 - 4\right)^2 = \left((x+2)(x-2)\right)^2 = \underline{\underline{(x+2)^2(x-2)^2}}.$$

d) Vi ser ved innsetting at $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$ når $x = 1$. Da gir en polynomdivisjon (der jeg hopper over detaljer) at

$$\left(2x^3 - 7x^2 + 2x + 3\right) : (x-1) = 2x^2 - 5x - 3,$$

som kan faktoriseres videre ved å løse andregradslikningen

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{5+7}{4} = 3 \\ \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dermed har jeg at

$$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = (x-1) \cdot 2(x-3)\left(x - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \underline{\underline{(x-1)(x-3)(2x+1)}}.$$

e) Her er det plundrete å prøve seg fram til en x-verdi som gjør at polynomet blir lik null. Men med litt smartness kan vi faktorisere slik:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = x^2(x+3) + 4(x+3) = \underline{\underline{\left(x^2+4\right)(x+3)}}.$$

Legg merke til at $x^2 + 4$ ikke kan faktoriseres videre i reelle 1.gradsfaktorer. Vi må derfor finne oss i at faktoriseringen inneholder et 2.gradspolynom.

I resten av dette notatet skal jeg forutsette at nevneren allerede er faktorisert, og konsentrere meg om delbrøkoppspaltingen. Denne går ut på å uttrykke den gitte brøken som en sum av enklere brøker som har de faktorene vi har funnet som nevnere. Jeg skal vise framgangsmåten for de vanligste situasjonene som kan forekomme.

2. Forskjellige førstegradsfaktorer i nevneren.

Dersom nevneren kun består av forskjellige, reelle førstegradsfaktorer, omformer vi til en sum av brøker der tellerne er konstanter og nevnerne er de faktorene som vi har funnet. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 2.1: Delbrøkoppspalt uttrykkene nedenfor:

a) $\dfrac{3x+2}{x(x+2)}$.

b) $\dfrac{3x^2 - 7x - 4}{x(x-2)(x+1)}$.

Løsning:

a) Vi skal nå finne to tall A og B slik at

$$\frac{3x+2}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A}{x}\cdot\frac{x+2}{x+2}+\frac{B}{x+2}\cdot\frac{x}{x}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}$$

$$=\frac{Ax+2A+Bx}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$$

Dette er egentlig en serie *identiteter*, slik at første og siste brøk skal være like for alle verdier av x. Da må vi ha at

$$A+B=3$$
$$2A=2$$

Av den siste likningen får vi direkte at $A=1$, som innsatt i den første likningen gir

$$1+B=3 \quad\Leftrightarrow\quad B=2.$$

Dermed har vi delbrøkoppspaltingen

$$\frac{3x+2}{x(x+2)}=\underline{\underline{\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}}}.$$

b) Vi skal nå finne tre tall A, B og C slik at

$$\frac{3x^2-7x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x-2)(x+1)+B\cdot x(x+1)+C\cdot x(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{Ax^2-Ax-2A+Bx^2+Bx+Cx^2-2Cx}{x(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-A+B-2C)x+(-2A)}{x(x-2)(x+1)}$$

Her må koeffisientene foran x^2, x og konstantleddet være like i første og siste brøk. Dette gir likningssystemet

$$\begin{array}{llll} A & +B & +C & =3 \\ -A & +B & -2C & =-7 \\ -2A & & & =-4 \end{array}$$

Vi ser direkte av siste likning at $A=2$. Hvis vi skifter fortegn på andre likning og deretter legger sammen alle tre likningene, får vi

$$3C=6 \quad\Leftrightarrow\quad C=2.$$

Av første likning får vi nå at

$$B=3-A-C=3-2-2=-1.$$

Dermed har vi at

$$\frac{3x^2-7x-4}{x(x-2)(x+1)}=\underline{\underline{\frac{2}{x}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}}}.$$

Oppgave 2.1.

3. Flere like førstegradsfaktorer i nevneren.

Dersom nevneren inneholder flere like førstegradsfaktorer, d.v.s. faktorer av typen $(x-a)^n$, finner vi delbrøker av typen

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 3.1: Delbrøkoppspalt brøken

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}.$$

Løsning: Vi må finne tall *A*, *B* og *C* slik at

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx+Cx^2-Cx}{x(x-1)^2}=\frac{(A+C)x^2+(-2A+B-C)x+A}{x(x-1)^2}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha at

$$\begin{aligned} A \quad\quad +C &= 1 \\ -2A+B-C &= 0 \\ A \quad\quad\quad\quad &= 2 \end{aligned}$$

Dette likningssystemet løses uten problemer, og vi får

$A=2$,
$C=1-A=-1$,
$B=C+2A=3$.

Dermed har vi at

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}=\underline{\underline{\frac{2}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}}}.$$

Oppgave 3.1.

4. "Tildekkingsmetoden".

Når nevneren består av bare ulike førstegradsfaktorer, har vi en snarvei som kan forenkle delbrøkoppspaltingen. Metoden kalles gjerne "tildekkingsmetoden" eller "metoden med håndspålegging". Den er enklere å gjennomføre enn å forklare. Eksemplet nedenfor viser både den formelle og den praktiske framgangsmåten.

Eksempel 4.1: Bruk "tildekkingsmetoden" til å delbrøkoppspalte

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}.$$

Løsning: Vi skal altså finne to konstanter *A* og *B* slik at

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}.$$

Formelt går vi fram slik: For å finne *A*, multipliserer vi begge sider av likhetstegnet med nevneren i den brøken som har *A* som teller, d.v.s. med $x+1$. Da får vi

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}(x+1)=\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\right)(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x-1}=A+\frac{B}{x-1}(x+1).$$

Så setter vi $x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1$, og får

$$\frac{2}{-1-1}=A+\frac{B}{(-1)-1}\cdot(1-1) \quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{2}{-2}=\underline{-1}.$$

Vi finner *B* ved å multiplisere med nevneren i den brøken som har *B* som teller, d.v.s. med $x-1$. Da får vi

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)}(x-1)=\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\right)(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x+1}=\frac{A(x-1)}{x+1}+B.$$

Så setter vi $x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$. Da får vi

$$\frac{2}{1+1}=\frac{A\cdot(1-1)}{1+1}+B \quad\Leftrightarrow\quad B=\frac{2}{2}=\underline{1}.$$

Den praktiske framgangsmåten er mye enklere. For å finne *A*, "tildekkes" alle forekomstene av nevneren $x+1$, og alle andre delbrøker. Vi får altså

$$\frac{2}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\frac{A}{\cancel{x+1}}+\cancel{\frac{B}{x-1}}.$$

Så setter vi $x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1$, og får

$$A=\frac{2}{-1-1}=\frac{2}{-2}=\underline{-1}.$$

Vi finner *B* på tilsvarende måte:

$$\frac{2}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\cancel{\frac{A}{x+1}}+\frac{B}{\cancel{x-1}}.$$

Vi setter $x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$, og får

$$B=\frac{2}{1+1}=\underline{1}.$$

Oppgave 4.1.

Denne metoden fungerer ikke like godt dersom vi har flere like førstegradsfaktorer i nevneren. Vi kan likevel komme et stykke på vei, slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 4.2: Bruk "tildekkingsmetoden" til å delbrøkoppspalte brøken fra Eksempel 3.1:

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}.$$

Løsning: Som før skal vi finne tre konstanter *A*, *B* og *C* slik at

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Vi kan nå finne *A* og *B* med "tildekkingsmetoden":

$$\frac{x^2+2}{\cancel{x}(x-1)^2}=\frac{A}{\cancel{x}}+\cancel{\frac{B}{(x-1)^2}}+\cancel{\frac{C}{x-1}}\quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{0^2+2}{(0-1)^2}=\underline{2}.$$

$$\frac{x^2+2}{x\cancel{(x-1)^2}}=\cancel{\frac{A}{x}}+\frac{B}{\cancel{(x-1)^2}}+\cancel{\frac{C}{x-1}}\quad\Leftrightarrow\quad B=\frac{1^2+2}{1}=\underline{3}.$$

Nå finner vi enklest *C* ved å sette inn det vi allerede vet:

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}=\frac{2}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{2(x-1)^2+3x+Cx(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+2+3x+Cx^2-Cx}{x(x-1)^2}=\frac{(2+C)x^2+(-1-C)x+2}{x(x-1)^2}$$

Nå har vi to likninger som begge gir samme verdi for *C*:

$$2+C=1\quad\Leftrightarrow\quad C=-1$$

og

$$-1-C=0\quad\Leftrightarrow\quad C=-1.$$

Som før får vi da delbrøkoppspaltingen

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)^2}=\underline{\underline{\frac{2}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}}}.$$

5. Andregradsfaktorer i nevneren.

Dersom nevneren inneholder andregradsfaktorer som ikke kan faktoriseres videre til reelle førstegradsfaktorer, må vi finne en delbrøk der telleren er av første grad. Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten:

Eksempel 5.1: Delbrøkoppspalt

$$\frac{7x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Løsning: Vi merker oss at x^2+2x+2 ikke kan faktoriseres i reelle førstegradsfaktorer, for eksempel ved å prøve å løse likningen $x^2+2x+2=0$, eller enklere ved å legge merke til at

$$x^2+2x+2=(x^2+2x+1)+1=(x+1)^2+1$$

som aldri kan bli lik null. Vi må derfor benytte delbrøkoppspaltingen nedenfor:

$$\frac{7x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{Ax^2+2Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+(2A-C)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

Siden dette er en identitet, må vi ha at

$$\begin{aligned} A \quad +B \qquad\quad &= 0 \\ 2A \quad -B \quad +C &= 7 \\ 2A \qquad\quad -C &= 3 \end{aligned}$$

Vi starter med å legge sammen alle likningene. Da får vi

$$5A = 10 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{2}.$$

Deretter gir den øverste likningen at

$$B = -A = \underline{-2}$$

mens den nederste likningen gir

$$C = 2A - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = \underline{1}.$$

Vi har altså delbrøkoppspaltingen

$$\frac{7x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \underline{\underline{\frac{2}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+2x+2}}}.$$

Oppgave 5.1.

I noen anvendelser kan det lønne seg å benytte andre delbrøkoppspaltinger. Framgangsmåten er imidlertid den samme uansett hvilken variant man benytter.

6. Flere like andregradsfaktorer i nevneren.

Dersom vi har flere like andregradsfaktorer i nevneren, d.v.s. faktorer av typen $(ax^2+bx+c)^n$, finner vi etter samme prinsipp som tidligere delbrøker av typen

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Eksemplet nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 6.1: Delbrøkoppspalt

$$\frac{-x^4+2x^3+6x-9}{x(x^2+3)^2}.$$

Løsning: Den naturlige delbrøkoppspaltingen er

$$\frac{-x^4+2x^3+6x-9}{x\left(x^2+3\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+3\right)}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$=\frac{A\left(x^2+3\right)^2+\left(B_1x+C_1\right)\cdot x\left(x^2+3\right)+\left(B_2x+C_2\right)\cdot x}{x\left(x^2+3\right)^2}$$

$$=\frac{Ax^4+6Ax^2+9A+B_1x^4+3B_1x^2+C_1x^3+3C_1x+B_2x^2+C_2x}{x\left(x^2+3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(A+B_1\right)x^4+C_1x^3+\left(6A+3B_1+B_2\right)x^2+\left(3C_1+C_2\right)x+9A}{x\left(x^2+3\right)^2}$$

Sammenlikning av koeffisienter gir 5 likninger med 5 ukjente. Men dersom vi jobber systematisk, løser dette seg lett. Vi starter med konstantleddet, og ser at

$$9A=-9 \quad \Leftrightarrow \quad A=\underline{-1}.$$

Koeffisienten foran 4.gradsleddet gir nå

$$A+B_1=-1 \quad \Leftrightarrow \quad B_1=-A-1=-\left(-1\right)-1=\underline{0}.$$

Koeffisienten foran 3.gradsleddet gir direkte

$$C_1=\underline{2}.$$

De to siste koeffisientene gir

$$6A+3B_1+B_2=0 \quad \Leftrightarrow \quad B_2=-3B_1-6A=0-6\cdot\left(-1\right)=\underline{6}.$$

$$3C_1+C_2=6 \quad \Leftrightarrow \quad C_2=6-3C_1=6-3\cdot 2=\underline{0}.$$

Da blir

$$\frac{-x^4+2x^3+6x-9}{x\left(x^2+3\right)^2}=\underline{\underline{\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2+3}+\frac{6x}{\left(x^2+3\right)^2}}}$$

Oppgave 6.1.