Brøkregning.

1. Forkorting.

Det er svært få ting du kan gjøre med en brøk. Det er imidlertid et viktig unntak:

Du kan ***multiplisere eller dividere både teller og nevner i en brøk med samme tall***.

Merk at du ikke kan multiplisere eller dividere med null.

Disse enkle operasjonene er utgangspunktet for ***forkorting av brøker***. Prinsippet er at dersom både teller og nevner har en felles faktor, kan teller og nevner divideres med denne faktoren. Vi sier at faktoren ***forkortes bort***. Før du kan forkorte, må du derfor faktorisere både teller og nevner, og se om det er noen faktorer som fins i både teller og nevner. Slike faktorer kan da forkortes bort.

Merk at det kun er felles ***faktorer*** i teller og nevner som kan forkortes bort. I brøker av typen

$$\frac{3x-1}{3(x+2)}$$

kan du således *ikke* forkorte bort 3-tallet, fordi 3-tallet er *ikke* felles faktor for alle leddene i teller.

Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten:

Eksempel 1.1: Forkort (om mulig) brøkene nedenfor:

a) $\dfrac{2ab^2}{4ab-2a}$.

b) $\dfrac{xy-3x^2}{y^2-9x^2}$.

c) $\dfrac{3x^2-12xy+12y^2}{x^3-4xy^2}$

Løsning:

a) $\dfrac{2ab^2}{4ab-2a}=\dfrac{\cancel{2a}b^2}{\cancel{2a}(2b-1)}=\underline{\underline{\dfrac{b^2}{2b-1}}}$.

b) $\dfrac{xy-3x^2}{y^2-9x^2}=\dfrac{x\cancel{(y-3x)}}{(y+3x)\cancel{(y-3x)}}=\underline{\underline{\dfrac{x}{y+3x}}}$.

c) $\dfrac{3x^2-12xy+12y^2}{x^3-4xy^2}=\dfrac{3(x^2-4xy+4y^2)}{x(x^2-4y^2)}=\dfrac{3(x-2y)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-2y)}(x+2y)}=\underline{\underline{\dfrac{3(x-2y)}{x(x+2y)}}}$.

Oppgave 1.1.

2. Sammentrekking av brøker.

Når du skal ***trekke sammen*** brøker, må du først skaffe deg en ***fellesnevner***, som er produktet av alle faktorer som inngår i en eller flere av nevnerne. Du må derfor starte med å faktorisere alle nevnerne. For hver brøk multipliseres deretter teller og nevner med de faktorene fra fellesnevneren som *ikke* inngår i brøkens nevner. Deretter settes alt opp på en brøkstrek (husk at minus foran en brøk behandles som minus foran en parentes), og telleren trekkes sammen. Om mulig forkortes den brøken som vi kommer fram til. Se eksemplene nedenfor.

Eksempel 2.1: Trekk sammen brøkene nedenfor:

a) $\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{1}{2x+4}$

b) $\dfrac{x-2}{x+1}-2+\dfrac{3}{x}$

c) $\dfrac{3}{2x-6}-\dfrac{x-2}{x^2-3x}-\dfrac{6}{x^3-9x}$

Løsning:

a) Faktoriserer:

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

$$2x+4=2(x+2)$$

Fellesnevner:

$$2(x+2)(x-2).$$

$$\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{2x+4}=\frac{x}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{2(x+2)}\cdot\frac{x-2}{x-2}=\frac{x\cdot 2-1\cdot(x-2)}{2(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{2x-x+2}{2(x+2)(x-2)}=\frac{\cancel{x+2}}{2\cancel{(x+2)}(x-2)}=\underline{\underline{\frac{1}{2(x-2)}}}$$

b) Her oppfatter vi 2-tallet som $\frac{2}{1}$, slik at vi har faktorene $x+1$, 1, og x. Da blir fellesnevneren

$$(x+1)x,$$

slik at vi får:

$$\frac{x-2}{x+1}-2+\frac{3}{x}=\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{x}{x}-\frac{2}{1}\cdot\frac{(x+1)x}{(x+1)x}+\frac{3}{x}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}$$

$$=\frac{(x^2-2x)-2(x^2+x)+(3x+3)}{(x+1)x}$$

$$=\frac{x^2-2x-2x^2-2x+3x+3}{x(x+1)}=\underline{\underline{\frac{-x^2-x+3}{x(x+1)}}}$$

c) Faktoriserer:

$$2x-6=2(x-3)$$

$$x^2-3x=x(x-3)$$

$$x^3-9x=x\left(x^2-3^2\right)=x(x+3)(x-3)$$

Fellesnevner:

$$2x(x+3)(x-3).$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2x-6}-\frac{x-2}{x^2-3x}-\frac{6}{x^3-9x}&=\frac{3}{2(x-3)}\cdot\frac{x(x+3)}{x(x+3)}-\frac{x-2}{x(x-3)}\cdot\frac{2(x+3)}{2(x+3)}-\frac{6}{x(x+3)(x-3)}\cdot\frac{2}{2}\\&=\frac{\left(3x^2+9x\right)-2(x-2)(x+3)-12}{2x(x+3)(x-3)}\\&=\frac{3x^2+9x-2x^2-6x+4x+12-12}{2x(x+3)(x-3)}\\&=\frac{x^2+7x}{2x(x+3)(x-3)}=\frac{\cancel{x}(x+7)}{2\cancel{x}(x+3)(x-3)}\\&=\underline{\underline{\frac{x+7}{2(x+3)(x-3)}}}\end{aligned}$$

Oppgave 2.1.

Noen ganger har vi bruk for å gå den motsatte veien: splitte opp en brøk der nevneren er et produkt av faktorer til en sum av brøker der nevnerne er enklest mulig. Denne prosessen kalles ***delbrøkoppspalting***, og er behandlet i et eget notat.

3. Brudne brøker.

En *brudden brøk* er en brøk der teller og/eller nevner selv er brøker. Nevnerne i disse "småbrøkene" kalles gjerne "smånevnere". Slike brøker forenkles ved å multiplisere teller og nevner i hovedbrøken med "smånevnerne" (eller med fellesnevneren for "småbrøkene").

Det kan ofte lønne seg å sette de opprinnelige tellerne og nevnerne opp på en brøkstrek først. I eksemplene nedenfor er begge metodene benyttet.

Eksempel 3.1: Skriv de brudne brøkene nedenfor som en vanlig brøk:

a) $\dfrac{2+\frac{1}{x-1}}{x+1}$.

b) $\dfrac{2-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}}$.

c) $\dfrac{\frac{3}{x+1}-1}{2-\frac{1}{x-1}}$.

Løsning:

a) Vi kan regne direkte slik:

$$\frac{2+\frac{1}{x-1}}{x+1}=\frac{\left(2+\frac{1}{x-1}\right)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)+\frac{1}{\cancel{x-1}}\cancel{(x-1)}}{x^2-1}=\frac{2x-2+1}{x^2-1}=\underline{\underline{\frac{2x-1}{x^2-1}}}.$$

Eller vi kan gjøre om den opprinnelige telleren til en brudden brøk først:

$$\frac{2+\frac{1}{x-1}}{x+1}=\frac{2\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}}{x+1}=\frac{\frac{2x-2+1}{\cancel{x-1}}\cdot\cancel{(x-1)}}{(x+1)(x-1)}=\underline{\underline{\frac{2x-1}{x^2-1}}}.$$

b) Vi kan regne direkte slik:

$$\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}}=\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot x(x-1)}{\frac{x}{\cancel{x-1}}\cdot x\cancel{(x-1)}}=\frac{2\cdot x(x-1)-\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}(x-1)}{x^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-x+1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{2x^2-3x+1}{x^2}}}$$

Eller vi kan gjøre om den opprinnelige telleren til en brudden brøk først:

$$\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}}=\frac{2\cdot\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x-1}}=\frac{\left(\frac{2x-1}{\cancel{x}}\right)\cdot\cancel{x}(x-1)}{\frac{x}{\cancel{x-1}}\cdot x\cancel{(x-1)}}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-x+1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{2x^2-3x+1}{x^2}}}$$

c) Dersom vi regner direkte, får vi:

$$\frac{\frac{3}{x+1}-1}{2-\frac{1}{x-1}}=\frac{\left(\frac{3}{x+1}-1\right)(x+1)(x-1)}{\left(2-\frac{1}{x-1}\right)(x+1)(x-1)}=\frac{\frac{3}{\cancel{x+1}}\cancel{(x+1)}(x-1)-1\cdot\left(x^2-1\right)}{2\left(x^2-1\right)-\frac{1}{\cancel{x-1}}(x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{3(x-1)-x^2+1}{2x^2-2-(x+1)}$$

$$=\frac{3x-3-x^2+1}{2x^2-2-x-1}=\underline{\underline{\frac{-x^2+3x-2}{2x^2-x-3}}}$$

Dersom vi først skriver både teller og nevner som rene brudne brøker, får vi:

$$\frac{\frac{3}{x+1}-1}{2-\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}}{2\cdot\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{2-x}{\cancel{x+1}}\cdot\cancel{(x+1)}(x-1)}{\frac{2x-2-1}{\cancel{x-1}}\cdot(x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{(2-x)(x-1)}{(2x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{2x-2-x^2+x}{2x^2+2x-3x-3}=\underline{\underline{\frac{-x^2+3x-2}{2x^2-x-3}}}$$

Vær nøye med hva som er hovedbrøkstrek, og hva som er "småbrøk-strek"! Eksemplet nedenfor viser hva som skjer dersom du roter med hva som er hovedbrøkstrek:

Eksempel 3.2: Vis at den brudne brøken

$$\begin{array}{c} x+2 \\ \hline x+1 \\ \hline x-1 \end{array}$$

kan oppfattes på to forskjellige måter, og vis at de to tolkingene fører til ulike uttrykk når brøken omformes til en vanlig brøk.

Løsning: Dersom uttrykket oppfattes som

$$\frac{\frac{x+2}{x+1}}{x-1},$$

skal teller og nevner multipliseres med $x+1$. Da får du:

$$\frac{\frac{x+2}{x+1}}{x-1}=\frac{\frac{x+2}{\cancel{x+1}}}{x-1}\cdot\frac{\cancel{(x+1)}}{(x+1)}=\underline{\underline{\frac{x+2}{x^2-1}}}.$$

Men dersom uttrykket oppfattes som

$$\frac{x+2}{\frac{x+1}{x-1}},$$

må teller og nevner multipliseres med $x-1$. Da får du:

$$\frac{x+2}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{x+2}{\frac{x+1}{\cancel{x-1}}}\cdot\frac{(x-1)}{\cancel{(x-1)}}=\frac{x^2-x+2x-2}{x+1}=\underline{\underline{\frac{x^2+x-2}{x+1}}}.$$

Eksemplet nedenfor viser en situasjon der det er lett å gjøre feil:

Eksempel 3.3: Skriv den brudne brøken nedenfor som en vanlig brøk:

$$\frac{2-\frac{x}{2}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)}.$$

Løsning: Her er det fristende å bli kvitt smånevnerne ved å multiplisere teller og nevner med 2. Men da vil du kun bli kvitt "smånevneren" i den ene nevnerfaktoren. For å bli kvitt alle smånevnerne, må du multiplisere teller og nevner i hovedbrøken med 4:

$$\frac{2-\frac{x}{2}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\frac{\left(2-\frac{x}{2}\right)\cdot 4}{\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot 2\right)\cdot\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot 2\right)}=\frac{8-2x}{(2+x)(2-x)}=\underline{\underline{\frac{8-2x}{4-x^2}}}.$$

Dette ser du kanskje lettere hvis du først multipliserer ut nevneren (med 3. kvadratsetning):

$$\frac{2-\frac{x}{2}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\frac{2-\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\left(2-\frac{x}{2}\right)\cdot 4}{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\cdot 4}=\underline{\underline{\frac{8-2x}{4-x^2}}}.$$

Oppgave 3.1.
Oppgave 3.2. (Denne oppgaven er forholdsvis krevende).