Grunnleggende algebra.

1. Grunnreglene.

Algebraen danner grunnlaget for all matematikk. Det er derfor meget viktig at du behersker disse grunnleggende reglene.

Først et par (litt upresise) definisjoner:

- Et **ledd** atskilles fra andre ledd med pluss eller minus.
- En **faktor** atskilles fra andre faktorer med et gangetegn.

Eksempel 1.1: Hvilke ledd og faktorer finner du i uttrykket

$xy-(x-y)(x^2+6y)$?

Løsning: Uttrykket består av to **ledd**, xy og $(x-y)(x^2+6y)$.

- Leddet xy består av to **faktorer**, x og y.
- Leddet $(x-y)(x^2+6y)$ består av to **faktorer**, $(x-y)$ og (x^2+6y).

  Faktoren $(x-y)$ er bygd opp av to **ledd**, x og y.

  Faktoren (x^2+6y) er bygd opp av to **ledd** som igjen er bygd opp av **faktorer** slik:

  - x^2 består av faktorene x og x.
  - $6y$ består av faktorene 2, 3 og y.

De viktigste regnereglene er:

$$\begin{aligned} &a+b=b+a \\ &(a+b)+c=a+(b+c) \\ &a\cdot b=b\cdot a \\ &(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \\ &a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \end{aligned}$$

Dessuten kan du trekke sammen like ledd: $a+a=2a$.

Til slutt tar vi med grunnreglene for regning med negative tall:

$$\begin{aligned} &(-1)\cdot(-1)=+1 \\ &-(a+b)=-a-b \end{aligned}$$

Legg merke til den siste regelen: Når du oppløser en parentes med minus foran, må du skifte fortegn på *alle* leddene inni parentesen.

Det er vanlig å sløyfe multiplikasjonstegnet når dette kan gjøres uten at det oppstår misforståelser.

Et par eksempler på bruken av disse reglene:

Eksempel 1.2: Multipliser sammen uttrykkene nedenfor, og skriv svaret så enkelt som mulig:

a) $(2x-y)(x-3y)$

b) $(2a-b)(a+b-3)$

Løsning:

a)
$$\begin{aligned}(2x-y)(x-3y) &= 2x(x-3y)-y(x-3y)\\ &= 2x^2-6xy-xy+3y^2\\ &= \underline{\underline{2x^2-7xy+3y^2}}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}(2a-b)(a+b-3) &= 2a(a+b-3)-b(a+b-3)\\ &= 2a^2+2ab-6a-ab-b^2+3b\\ &= \underline{\underline{2a^2-6a+ab-b^2+3b}}\end{aligned}$$

Jeg vil anbefale at du setter et lite merke ved leddene etter hvert som du trekker sammen. Da kan du til slutt kontrollere at du har fått med deg alle leddene.

Når du har flere parenteser inni hverandre, lønner det seg vanligvis å oppløse parentesene innenfra, og trekke sammen etter hvert. Dette illustreres i eksemplet nedenfor:

Eksempel 1.3: Skriv uttrykket nedenfor enklere:

$$2a-\big(b-\big(a-(2b-a)\big)\big).$$

Løsning:

$$\begin{aligned}2a-\big(b-\big(a-(2b-a)\big)\big) &= 2a-\big(b-(a-2b+a)\big)\\ &= 2a-\big(b-(2a-2b)\big)\\ &= 2a-(b-2a+2b)\\ &= 2a-b+2a-2b\\ &= \underline{\underline{4a-3b}}\end{aligned}$$

`Oppgave 1.1`.

2. Prioriterings-rekkefølgen.

La oss se nærmere på uttrykket

$$3 \cdot 5^2 + 4.$$

Når du regner ut dette uttrykket, starter du med å regne ut potensuttrykket 5^2 og får 25. Dette tallet multipliserer du med 3 og får 75. Til slutt legger du til 4 og får 79.

Vi har altså en fast *prioriteringsrekkefølge* for slike operasjoner:

1. Først beregnes alle potensuttrykk.
2. Deretter beregnes multiplikasjoner og divisjoner.
3. Til slutt utføres alle addisjoner og subtraksjoner.

Når flere operasjoner med lik prioritet skal utføres, regner vi fra venstre mot høyre. Dersom vi ønsker å endre denne rekkefølgen, må vi bruke parenteser.

Her er noen eksempler på situasjoner der det er lett å gjøre feil:

- Når du skriver -3^2, betyr det at du først opphøyer 3^2 og får 9. Deretter skifter du fortegn og får -9. Dersom du mener at -3 skal opphøyes i andre (d.v.s. ganges med seg selv), må du skrive $(-3)^2$ og får 9.
- Når du ganger ut uttrykket $3(x-1)(x+2)$, må du være klar over at 3-tallet kun kan ganges inn i den ene parentesen, for eksempel slik:
  $$3(x-1)(x+2) = (3x-3)(x+2) = 3x^2 + 6x - 3x - 6 = 3x^2 + 3x - 6.$$
  Eller slik:
  $$3(x-1)(x+2) = (x-1)(3x+6) = 3x^2 + 6x - 3x - 6 = 3x^2 + 3x - 6.$$
- Det er fort gjort å gjøre feil når du skal forenkle uttrykk av formen $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. Du kan ***ikke*** gange inn 2-tallet og få $(2x-1)^2$. Grunnen er at $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, og 2-tallet kan kun ganges med den ene av parentesene. Riktig svar skal være
  $$2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x^2 - 2\cdot x\cdot \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right) = 2\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) = \underline{\underline{2x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}}}.$$

Oppgave 2.1.

3. Kvadratsetningene.

På grunnlag av reglene ovenfor kan vi utlede flere setninger. De viktigste er *kvadratsetningene*:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	(1. og 2. kvadratsetning)
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	(3. kvadratsetning)

Disse reglene viser seg å være viktige når vi kommer til *faktorisering*.

Eksempel 3.1: Regn ut uttrykkene nedenfor ved hjelp av kvadratsetningene:

a) $\left(3x-y^2\right)^2$.

b) $(2x-y)^2-(x-2y)^2$

Løsning:

a) $\left(3x-y^2\right)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot y^2+\left(y^2\right)^2=\underline{\underline{9x^2-6xy^2+y^4}}$.

b) $$(2x-y)^2-(x-2y)^2=\left((2x)^2-2\cdot 2x\cdot y+y^2\right)-\left(x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2\right)$$
$$=4x^2-4xy+y^2-x^2+4xy-4y^2=\underline{\underline{3x^2-3y^2}}$$

Alternativ: Vi kan også benytte 3. kvadratsetning:
$$(2x-y)^2-(x-2y)^2=\left((2x-y)+(x-2y)\right)\left((2x-y)-(x-2y)\right)$$
$$=(3x-3y)(x+y)=3(x-y)(x+y)=\underline{\underline{3\left(x^2-y^2\right)}}$$

Oppgave 3.1.

4. Faktorisering.

Å **faktorisere** et uttrykk er nærmest det motsatte av å trekke sammen ledd i et uttrykk. Du kan faktorisere bl.a. ved å:

1) Sette felles faktor utenfor parentes.
2) Bruke en kvadratsetning.

Vi skal senere se på flere verktøy for faktorisering.

Som regel lønner det seg å starte med å se etter felles faktorer som kan settes utenfor parentes. Når du ikke finner flere slike felles faktorer, undersøker du om en av kvadratsetningene kan brukes. Eksemplene nedenfor viser framgangsmåten.

Eksempel 4.1: Faktoroser uttrykkene nedenfor:

a) $6a^2b-12ab^2+6b^3$.

b) $4x^3y-9xy^3$.

Løsning:

a) $6a^2b-12ab^2+6b^3=6b\left(a^2-2ab+b^2\right)=\underline{\underline{6b(a-b)^2}}$.

b) $4x^3y-9xy^3=xy\left(4x^2-9y^2\right)=xy\left((2x)^2-(3y)^3\right)=\underline{\underline{xy(2x-3y)(2x+3y)}}$.

Det kan være vanskelig å avgjøre om et tre-leddet uttrykk kan faktoriseres med 1. (eller 2.) kvadratsetning. Dersom et tre-leddet uttrykk kan faktoriseres, må disse kravene være oppfylt:

1. To av leddene må være kvadrater. Skriv ned kvadratrota av disse to leddene.
2. Det tredje leddet må være 2 ganger produktet av disse kvadratrøttene.

Dette kan virke komplisert, så la oss se på et eksempel:

Eksempel 4.2: Faktoriser (om mulig)

$$9x^2 + 30xy + 25y^2 .$$

Løsning: Det er ingen felles faktorer som kan settes utenfor parentes. Men første og siste ledd er kvadratledd:

$$9x^2 = (3x)^2$$

og

$$25y^2 = (5y)^2 .$$

Det midterste leddet kan skrives

$$30xy = 2 \cdot 3x \cdot 5y ,$$

slik at du kan bruke 1. kvadratsetning:

$$9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = \underline{\underline{(3x+5y)^2}} .$$

Oppgave 4.1.

En gang i blant må du bruke mer fantasi for å få til faktoriseringen:

Eksempel 4.3: Faktoriser (om mulig)

$$2ax - 6ay + bx - 3by .$$

Løsning: Det er ingen faktorer som er felles for alle leddene. Men vi merker oss at de to første leddene har $2a$ som felles faktor, mens de to siste leddene har *b* som felles faktor. Da kan du omforme slik:

$$2ax - 6ay + bx - 3by = 2a(x - 3y) + b(x - 3y)$$

Men nå har du fått et to-leddet uttrykk med $(x - 3y)$ som felles faktor. Denne kan settes utenfor parentes, slik at du får:

$$2ax - 6ay + bx - 3by = 2a(x - 3y) + b(x - 3y) = \underline{\underline{(x - 3y)(2a + b)}} .$$

Du får samme resultat dersom du slår sammen 1. og 3. ledd til

$$2ax + bx = x(2a + b) ,$$

og 2. og 4. ledd til

$$-6ay - 3by = -3y(2a + b) .$$

Da blir $(2a + b)$ felles faktor. Gjennomfør regningene selv!

Oppgave 4.2.

Se også notatet om polynomdivisjon.