2. Litt finansmatematikk.

Geometriske rekker er svært viktige innen finansmatematikk. Utgangspunktet er at dersom et beløp K_0 får forrente seg til p % rente i n terminer, og renten legges til kapitalen etter hver termin, vil kapitalen ved *starten* av termin nr. n ha vokst til

$$K_n = K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n.$$

Hvis man nå etter et fast beløp K_0 inn i en bank ved starten av hver termin, vil man like etter innskudd nr. n ha innestående et beløp

$$K = K_0 + K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right) + K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^2 + \cdots + K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^{n-1}.$$

Men dette er en geometrisk rekke med n ledd og kvotient $\left(1+\tfrac{p}{100}\right)$, slik at

$$K = a_1\frac{\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n - 1}{\left(1+\tfrac{p}{100}\right) - 1} = \underline{K_0\cdot\tfrac{100}{p}.\left(\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n - 1\right)}.$$

Eksempel 3: Du setter inn 10 000 kroner i banken hvert år til 4% årlig rente.

a) Hvor mye har du stående i banken like etter det 10. innskuddet?

b) Hvor lang tid tar det før det oppsamlede beløpet har vokst til 200 000 kroner?

Løsning:

a) Bruker formelen over, og får

$$K = K_0\cdot\tfrac{100}{p}.\left(\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n - 1\right) = 10000\cdot\tfrac{100}{4}\cdot\left(1.04^{10}-1\right) = 10000\cdot 25\cdot 0.480244 = \underline{\underline{120061}}.$$

b) Må nå løse n av likningen

$$200000 = 10000\cdot\tfrac{100}{4}.\left(\left(1+\tfrac{4}{100}\right)^n - 1\right) \quad\Leftrightarrow\quad 20 = 25\left(1.04^n - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 1.04^n - 1 = 0.80 \quad\Leftrightarrow\quad 1.04^n = 1.80$$

$$\ln\left(1.04^n\right) = \ln 1.80 \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot\ln 1.04 = \ln 1.80 \quad\Leftrightarrow\quad n = \frac{\ln 1.80}{\ln 1.04} \approx \underline{\underline{15}}.$$

Det vil altså ta 15 år før oppsamlet beløp er vokst til 200 000 kroner. Da er beløpet vokst til 200 236 kroner ved hjelp av formelen i a).

Dersom du får utbetalt et beløp en gang i framtiden, har dette en ***nåverdi*** som er lik det innskuddet som du kan sette i banken i dag til en kjent rente for å få beløpet. Mer presist kan vi si at dersom du får et beløp K_n om n terminer, er nåverdien K_0 ved p % rente gitt ved

$$K_n = K_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n \quad\Leftrightarrow\quad K_0 = \frac{K_n}{\left(1+\tfrac{p}{100}\right)^n}.$$

Et ***annuitetslån*** er et lån der tilbakebetalingen skjer med like store beløp. I starten betaler du mest bare renter av lånet, men etter hvert vil en stadig større del av terminbeløpet være avdrag på lånet. Terminbeløpet beregnes ved å sette at summen nåverdiene av alle terminbeløpene skal være lik størrelsen av lånet. Vi setter lånebeløpet lik L, terminbeløpet som du betaler tilbake er T, renten er p, og vi har n terminer. Dersom første terminbeløp betales etter 1 termin, får vil likningen

$$L = \frac{T}{1+\frac{p}{100}} + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}.$$

Dette er en geometrisk rekke med første ledd $a_1 = \frac{T}{1+\frac{p}{100}}$ og kvotient $k = \frac{1}{1+\frac{p}{100}}$. Dette gir

$$L = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} = \frac{T}{1+\frac{p}{100}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+\frac{p}{100}} - 1} = T \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n - 1}{1-\left(1+\frac{p}{100}\right)} = T \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n - 1}{-\frac{p}{100}}$$

$$= T \cdot \frac{100}{p} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n\right) \quad \Leftrightarrow \quad T = L \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n} = L \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

Det er flere måter å beregne størrelsen av restlånet under veis. Det enkleste er kanskje å si at størrelsen av restlånet er nåverdien av de terminbeløpene som *ikke* er betalt hittil, beregnet til det aktuelle tidspunktet.

Eksempel 4: Du låner 200 000 kroner, som skal betales tilbake i 15 årlige terminer med like store terminbeløp (annuitetsprinsippet) med 8% rente. Første tilbakebetaling ett år etter låneopptak.

a) Hvor stort blir terminbeløpet?
b) Hvor mye av dette er avdrag, og hvor mye er renter ved første terminbeløp?
c) Hvor mye er avdrag, og hvor mye er renter ved 10. terminbeløp?

Løsning:

a) Bruker formelen ovenfor:

$$T = L \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1} = 200000 \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{1.08^{15}}{1.08^{15} - 1} = \underline{\underline{23361.91}}.$$

b) Du betaler rente av hele beløpet, slik at renten er $\frac{8}{100} \cdot 200000 = \underline{\underline{16000}}$.

Da blir avdraget $23361.91 - 16000 = \underline{\underline{7361.91}}$.

c) Like etter at det 9. terminbeløpet ble betalt, sto det igjen 6 terminer. Nåverdien av disse (beregnet til tidspunktet da 9. terminbeløp ble betalt) var

$$R = \frac{T}{1+\frac{p}{100}} + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{T}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^6}.$$

Dette er en geometrisk rekke av samme form som ovenfor, med $n = 6$. Vi får

$$R = T \cdot \frac{100}{p} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}}\right)^n\right) = 23361.91 \cdot \frac{100}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1.08}\right)^6\right) = \underline{107999.30}.$$

Renten av dette beløpet (som betales ved den 10. terminen) er $\frac{8}{100} \cdot 107999.30 = \underline{\underline{8639.94}}$.

Da blir avdraget $23361.91 - 8639.94 = \underline{\underline{14725.97}}$.