5. Taylor-rekker.

5.1. Utledning av Taylor-rekker.

Innledningsvis satte jeg opp tre potensrekker som jeg påsto konvergerer mot henholdsvis e^x, $\cos x$ og $\sin x$. Nå skal jeg vise hvordan disse rekkene framkommer.

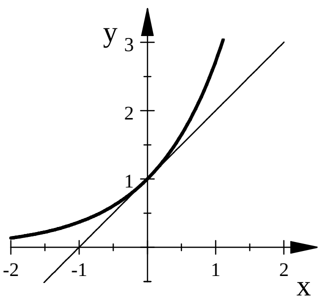
For å komme på sporet av hvordan vi utleder disse rekkene, kan vi se litt på de første partial-summene i rekka for e^x. Du husker sikkert at i innledningen påsto jeg at

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots.$$

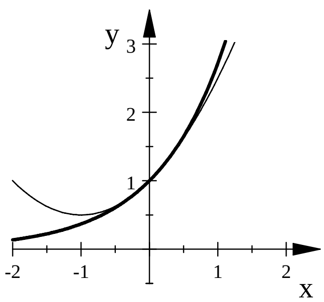
La oss bruke skrivemåten $T_n(x)$ for den *n*'te partialsumen av denne rekka, slik at

$T_2(x) = 1 + x$, $\quad T_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2$, $\quad T_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$.

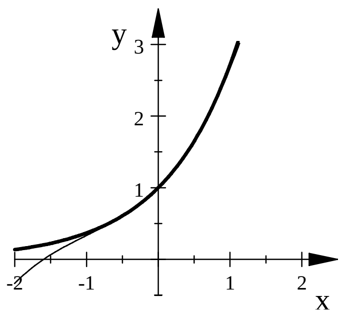
Nedenfor finner du grafene av disse partialsummene (tynn strek) sammen grafen for e^x (tykk strek):



$T_2(x) = 1 + x$



$T_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2$



$T_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$

Du ser at $T_2(x) = 1 + x$ er tangent til grafen til e^x når $x = 0$.

Grafen til $T_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2$ tangerer også grafen til e^x når $x = 0$, og de to grafene ser også ut til å ha samme krumning nær $x = 0$.

Grafen til $T_4(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$ ligger enda tettere inn til grafen til e^x nær $x = 0$.

Disse egenskapene kan tyde på at for alle partialsummene der $n \geq 3$ er:

$f(0) = T_n(0)$ fordi grafene faller sammen når $x = 0$.

$f'(0) = T_n'(0)$ fordi grafene har samme stigningstall når $x = 0$.

$f''(0) = T_n''(0)$ fordi grafene ser ut til å ha samme krumning nær $x = 0$.

Nå har vi funnet en ende som vi kan nøste videre på. Enn om vi bygger opp en partialsum ved å kreve at partialsummen skal være lik funksjonsverdien når $x = 0$, og at alle de deriverte av partialsummen skal være lik den tilsvarende deriverte av funksjonen når $x = 0$? Hvis vi er heldige (og dyktige), kan vi kanskje finne et system slik at partialsummen etter hvert får uendelig mange ledd. Da går den over til å bli en uendelig rekke. Og hvis vi er enda heldigere, vil denne rekka konvergere mot den funksjonen som vi gikk ut fra, i alle fall når *x* ligger innenfor et konvergensintervall.

Men vi trenger jo ikke å bygge opp partialsummen rundt $x = 0$. Vi kan heller bygge opp partialsummen rundt en vilkårlig verdi $x = a$. En slik partialsum med *n* ledd kalles et ***Taylor-polynom***, og skrives $T_n^a(x)$.

Vi ønsker altså å finne koeffisientene c_0, c_1, c_2 osv. i ei rekke

$$T_n^a(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots + c_n(x-a)^n.$$

(Denne rekka har egentlig $n+1$ ledd, men det bryr vi oss ikke om nå.)

Vi deriverer, og får

$$\frac{d}{dx}T_n^a(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + n \cdot c_n(x-a)^{n-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}T_n^a(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)\cdot c_n(x-a)^{n-2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}T_n^a(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2(x-a) + \cdots + n(n-1)(n-2)\cdot c_n(x-a)^{n-3}$$

Og slik fortsetter det.

Så skal kravene våre oppfylles:

$$T_n^a(a) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad c_0 = f(a).$$

$$\frac{d}{dx}T_n^a(a) = \frac{d}{dx}f(a) \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = \frac{d}{dx}f(a).$$

$$\frac{d^2}{dx^2}T_n^a(a) = \frac{d^2}{dx^2}f(a) \quad \Leftrightarrow \quad 2c_2 = \frac{d^2}{dx^2}f(a) \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(a)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}T_n^a(a) = \frac{d^3}{dx^3}f(a) \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot 2c_3 = \frac{d^3}{dx^3}f(a) \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{1}{3\cdot 2}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(a).$$

Og slik fortsetter det. Du innser sikkert at vi ender opp med den generelle formelen

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(a).$$

Nå er vi faktisk i mål. Den rekka som framkommer, kalles ***Taylor-polynomet av n'te grad for f(x) om (x – a)***. Vi summerer opp:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er *n* ganger deriverbar i et intervall,
og et punkt $x = a$ i dette intervallet.
Taylor-polynomet av n'te grad for $f(x)$ rundt $x = a$ er

$$T_n^a(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$$

der $c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(a)$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Nå er det veldig fristende å la $n \to \infty$. Den potensrekka som da framkommer, kalles ***Taylor-rekka for f(x) om (x – a)***. Men det gjenstår et stort og viktig problem: Kan vi være sikre på at denne Taylor-rekka konvergerer mot den funksjonen $f(x)$ som vi gikk ut fra? Eller en mer forsiktig formulering: fins det et intervall for *x* slik at Taylor-rekka konvergerer mot $f(x)$?

Svaret på dette problemet ligger i en setning som kalles ***Taylors setning***, og som vi ikke skal bevise:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er $n+1$ ganger deriverbar i et intervall, og et punkt $x=a$ i dette intervallet. La

$$T_n^a(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

være Taylor-polynomet av *n*'te grad for $f(x)$ rundt $x=a$. Da er

$$f(x)=T_n^a(x)+R_n(x)$$

der

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

og *c* er et tall mellom *a* og *x*.

Det sentrale i denne setningen er at $f(x)$ *er lik* Taylor-polynomet pluss et stygt ledd

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

som kalles *restleddet i Taylors setning*. Dersom vi kan vise at dette restleddet går mot 0 når $n\to\infty$, har vi faktisk vist at Taylor-rekka *er lik* $f(x)$. Men dette kan være problematisk, ikke minst fordi restledd-formelen inneholder en ukjent størrelse *c*. Det eneste vi vet om *c* er at den ligger mellom *a* og *x*. I praksis koster vi helst restledd-formelen under teppet, og tar sjansen på at dersom Taylor-rekka konvergerer, så konvergerer den mot $f(x)$. Denne konvergensen undersøker vi med forholdskriteriet, som også gir oss konvergensintervallet.

En liten merknad til slutt: Svært ofte setter vi opp Taylor-polynom og Taylor-rekker rundt $x=0$. Slike polynom og rekker rundt $x=0$ kalles ***Maclaurin-polynom*** og ***Maclaurin-rekker.*** De rekkene jeg har presentert for e^x, $\cos x$ og $\sin x$ er egentlig Maclaurin-rekker.

Nå er det på tide å vise at de rekkene vi satte opp i innledningen for e^x, $\cos x$ og $\sin x$ virkelig stemmer. Vi skal gjøre det ved å sette opp Macaurin-polynom, la $n\to\infty$, og til slutt undersøke konvergensen med forholdskriteriet.

Eksempel 5.1: Sett opp Maclaurin-rekka for

a) $f(x)=e^x$.

b) $f(x)=\sin x$.

c) $f(x)=\cos x$.

Undersøk konvergensen for disse rekkene.

Løsning: Som regel lønner det seg å starte med å derivere $f(x)$ mange ganger, og se om vi finner et system. Deretter setter vi inn $x=0$ (husk at vi skal finne Maclaurin-rekker), og finner koeffisientene i rekka med formelen

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(0).$$

a) $$f(x)=e^x \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}f(x)=e^x \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2}{dx^2}f(x)=e^x \;\Leftrightarrow\; \cdots \;\Leftrightarrow\; \frac{d^k}{dx^k}f(x)=e^x.$$

Da blir

$$c_0=\frac{1}{0!}\cdot f(0)=\frac{1}{1}\cdot e^0=1. \qquad c_1=\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dx}f(0)=\frac{1}{1}\cdot e^0=1.$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(0)=\frac{1}{2!}\cdot e^0=\frac{1}{2!}. \qquad c_3=\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(0)=\frac{1}{3!}\cdot e^0=\frac{1}{3!}.$$

Og generelt:

$$c_k=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}f(0)=\frac{1}{k!}\cdot e^0=\frac{1}{k!}.$$

Da blir rekka

$$e^x = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots+c_kx^k+\cdots$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{k!}x^k+\cdots=\underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k}}$$

Undersøker konvergensen med forholdskriteriet:

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{1}{k!}x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!}{k!\cdot(k+1)}x\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}\cdot|x|.$$

Men denne grenseverdien går mot null når $k\to\infty$. Da er $L<1$ for alle verdier av *x*, slik at rekka konvergerer for alle *x*.

b) $$f(x)=\sin x \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}f(x)=\cos x \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2}{dx^2}f(x)=-\sin x \;\Leftrightarrow\; \frac{d^3}{dx^3}f(x)=-\cos x$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{d^4}{dx^4}f(x)=\sin x \;\Leftrightarrow\; \frac{d^5}{dx^5}f(x)=\cos x \;\Leftrightarrow\; \frac{d^6}{dx^6}f(x)=-\sin x \;\Leftrightarrow\; \cdots$$

Og slik fortsetter det. Vi ser at det samme mønsteret vil gjenta seg. Da får vi at:

$$c_0=\frac{1}{0!}\cdot f(0)=\frac{1}{1}\cdot\sin 0=0. \qquad c_4=\frac{1}{4!}\cdot\frac{d^4}{dx^4}f(0)=\frac{1}{4!}\cdot\sin 0=0.$$

$$c_1=\frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dx}f(0)=\frac{1}{1}\cdot\cos 0=1. \qquad c_5=\frac{1}{5!}\cdot\frac{d^5}{dx^5}f(0)=\frac{1}{5!}\cdot\cos 0=\frac{1}{5!}.$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(0)=\frac{1}{2!}\cdot(-\sin 0)=0. \qquad c_6=\frac{1}{6!}\cdot\frac{d^6}{dx^6}f(0)=\frac{1}{6!}\cdot(-\sin 0)=0.$$

$$c_3=\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(0)=\frac{1}{3!}\cdot(-\cos 0)=-\frac{1}{3!}. \qquad c_7=\frac{1}{7!}\cdot\frac{d^7}{dx^7}f(0)=\frac{1}{7!}\cdot(-\cos 0)=-\frac{1}{7!}.$$

Vi ser at annenhver koeffisient blir lik null. De gjenværende koeffisientene får alternerende fortegn, med absoluttverdi $\frac{1}{k!}$. Maclaurin-rekka blir da

$$\sin x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_k x^k + \cdots$$
$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}}$$

Så var det konvergensen. Merk at fortegnet til leddene ikke spiller noen rolle på grunn av absoluttverditegnene:

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}\right)x^{2(k+1)+1}}{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)!}{(2k+1)!\cdot(2k+2)(2k+3)}x^2\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\cdot x^2$$

Men denne grenseverdien går mot null når $k\to\infty$. Da er $L<1$ for alle verdier av *x*, slik at rekka konvergerer for alle *x*.

c) Her kan vi gå fram på samme måte som da vi utledet rekka for $\sin x$. Men det er lettere å benytte at $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$. Vi deriverer derfor Maclaurin-rekka for $\sin x$, og får

$$\cos x = 1 - \frac{1}{3!}\cdot 3x^2 + \frac{1}{5!}\cdot 5x^4 - \frac{1}{7!}\cdot 7x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)x^{2k} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Denne rekka får samme konvergensintervall som rekka for $\sin x$, d.v.s. at rekka konvergerer for alle *x*.

Vi utleder ei rekke til:

Eksempel 5.2: Sett opp Taylor-rekka til $f(x)=\ln x$ rundt $x=1$, og undersøk konvergensen for denne rekka.

Løsning: Vi går fram på samme måte som før:

$$f(x)=\ln x \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2}{dx^2}f(x) = -x^{-2} \;\Leftrightarrow\; \frac{d^3}{dx^3}f(x) = -(-2)x^{-3}$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{d^4}{dx^4}f(x) = -(-2)(-3)x^{-4} \;\Leftrightarrow\; \frac{d^5}{dx^5}f(x) = -(-2)(-3)(-4)x^{-5}$$
$$\Leftrightarrow\; \cdots \;\Leftrightarrow\; \frac{d^k}{dx^k}f(x) = (-1)(-2)\cdots(-(k-1))x^{-k} = (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot x^{-k}$$

Da blir (husk at nå er $a=1$):

$$c_0 = \frac{1}{0!}\cdot f(1) = \frac{1}{1}\cdot \ln 1 = 0. \qquad c_1 = \frac{1}{1!}\cdot\frac{d}{dx}f(1) = \frac{1}{1}\cdot 1^{-1} = 1.$$
$$c_2 = \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}f(1) = \frac{1}{2!}\cdot(-1)\cdot 1^{-2} = -\frac{1}{2}. \qquad c_3 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}f(1) = \frac{1}{3!}\cdot 2\cdot 1^{-3} = \frac{1}{3}.$$

$$c_4 = \frac{1}{4!}\cdot\frac{d^4}{dx^4} f(1) = \frac{1}{4!}\cdot(-1)(-2)(-3)\cdot 1^{-4} = -\frac{1}{4}.$$

Og generelt:

$$c_k = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k} f(1) = \frac{1}{k!}\cdot(-1)^{k-1}(k-1)!\cdot 1^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Da blir rekka

$$\ln x = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + \cdots + c_k(x-1)^k + \cdots$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k}}$$

Undersøker konvergensen med forholdskriteriet:

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{(k+1)-1}}{k+1}(x-1)^{k+1}}{\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{k+1}}{k+1}\cdot\frac{k}{(x-1)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}(x-1)\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\cdot|x-1| = \frac{1}{1+0}\cdot|x-1| = \underline{|x-1|}$$

Rekka konvergerer når

$$L < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-1| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < x-1 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{0 < x < 2}.$$

Må også sjekke endepunktene:

$x = 0$: Rekka blir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(0-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1-k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

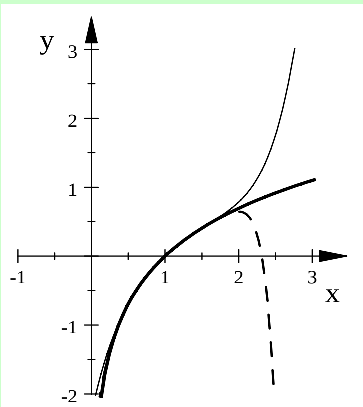
Men denne summen er den harmoniske rekka som vi vet divergerer.

$x = 2$: Rekka blir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(2-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot 1^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Her har vi den alternerende harmoniske rekka (riktignok med negativt fortegn) som vi vet konvergerer.

Altså konvergerer rekka når $\underline{\underline{0 < x \le 2}}$.



Det kan være instruktivt å plotte grafen til $\ln x$ sammen med noen av partialsummene til Taylor-rekka. På figuren til venstre er grafen til $\ln x$ plottet med tykk strek, mens summen av de 5 første leddene i rekka er plottet med tynn strek og summen av de 10 første leddene er plottet med stiplet linje. Vi ser hvordan disse partialsummene kommer nærmere inn mot grafen til $\ln x$ når antall ledd øker, forutsatt at vi befinner oss innenfor konvergensintervallet. Går vi utenfor konvergensintervallet, vil rekka absolutt ikke konvergere mot $\ln x$.

Ta forresten et lite tilbakeblikk på Eksempel 4.7. Der utledet vi den samme rekka med det samme konvergensintervallet på en annen måte.

Oppgave 5.1.

I neste eksempel skal vi sette opp en Maclaurin-rekke som kalles ***den binomiske rekka***:

Eksempel 5.3: Sett opp Maclaurin-rekka for

$$f(x) = (1+x)^m .$$

Løsning: Vi går fram etter kjent mønster:

$$f(x) = (1+x)^m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} f(x) = m(1+x)^{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^k}{dx^k} f(x) = m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1+x)^{m-(k-1)}$$

Da blir:

$$c_0 = f(0) = (1+0)^m = 1 .$$

$$c_1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{dx} f(0) = m(1+0)^{m-1} = m .$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2} f(0) = \frac{1}{2!} m(m-1)(1+0)^{m-2} = \frac{1}{2!} m(m-1) .$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3} f(0) = \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2)(1+0)^{m-3} = \frac{1}{3!} m(m-1)(m-2) .$$

Og slik fortsetter vi. Du ser at

$$c_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} f(0) = \frac{1}{k!} \cdot m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1+0)^{m-(k-1)} = \frac{m(m-1)\cdots(m-(k-1))}{k!} .$$

Hele rekka blir

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \cdots$$

$$= \underline{\underline{1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k}}$$

Vi skal hoppe over undersøkelsen av konvergens. Men vi kan vise at konvergensintervallet er $-1 < x < 1$.

Merk at dersom m er et helt, positivt tall, vil rekka få et endelig antall ledd. Hvis for eksempel $m = 3$, får vi at

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \frac{3\cdot 2}{2!} x^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!} x^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

som du (forhåpentlig) kjenner fra før. Alle etterfølgende ledd får koeffisient lik null.

Nedenfor ser du et eksempel på bruken av denne rekka:

Eksempel 5.4: Sett opp Maclaurin-rekka for

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \ .$$

Løsning: Vi starter med en omskrivning:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{1 - \tfrac{x^2}{4}} = 2\sqrt{1 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2} = 2\left(1 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Hvis vi nå setter $m = \frac{1}{2}$ og erstatter x med $-\left(\frac{x}{2}\right)^2$, kan vi bruke den binomiske rekka:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4 - x^2} &= 2\left(1 - \left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(1 + \tfrac{1}{2}\left(-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}\left(-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}\left(-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right)^3 + \cdots\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{128}x^4 - \frac{1}{1024}x^6 - \cdots\right) = \underline{\underline{2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{512}x^6 + \cdots}}
\end{aligned}$$

Rekka konvergerer når

$$-1 < -\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \tfrac{x^2}{4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-2 < x < 2}}.$$

5.2. Oppsummering.

Nå er det på tide å oppsummere de viktigste av de rekkene vi har funnet.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \qquad \text{for alle } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad \text{for alle } x$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad \text{for alle } x$$

$$\ln x = (x - 1) - \tfrac{1}{2}(x - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(x - 1)^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x - 1)^k \qquad \text{for } 0 < x \le 2$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{for } -1 < x < 1$$

$$\begin{aligned}
(1 + x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k \qquad \text{for } -1 < x < 1
\end{aligned}$$

Jeg forventer ikke at du går rundt og husker alle disse rekkene. Men jeg forventer at du vet at de eksisterer, og at du kan finne dem fram etter behov. Husk også at vi kan finne mange nye rekker på grunnlag av disse. Vi kan integrere rekkene, derivere dem, erstatte x med andre uttrykk, multiplisere rekkene med funksjoner av x, osv. slik vi gjorde i notatet om potensrekker.

5.3. Anvendelser av potensrekker.

Innledningsvis så vi på et par anvendelser av potensrekker. Vi skal avslutte med å se på noen flere anvendelser. Vær klar over at det fins utrolig mange andre anvendelser enn de vi kommer inn på her. Potensrekker dukker ofte opp i statistikk, fysikk, mekanikk osv, så jeg vil anbefale at du kjenner disse rekkene og disse anvendelsene.

5.3.1. Numerisk beregning av bestemt integral.

Vi så i innledningen et eksempel på hvordan vi kan bruke rekker til å beregne et bestemt integral. Men vi tar et eksempel til.

Eksempel 5.5: Innenfor statistikk benytter vi ofte *normalfordelingen*, som fører til at vi må beregne integral av typen

$$\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\,.$$

I dette eksemplet setter vi $t=1$, slik at vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\,.$$

Løsning: Vi tar utgangspunkt i rekka for e^x:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

Erstatter x med $-\frac{1}{2}x^2$ og får:

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}x^{2k}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1}{2^3\cdot 3!}x^6+\frac{1}{2^4\cdot 4!}x^8-\cdots$$

Integrerer:

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1}{2^3\cdot 3!}x^6+\cdots\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{7}x^7+\cdots\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{7}+\cdots\approx\underline{\underline{0.855}}$$

Siden rekka for $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ er ei alternerende rekke, er feilen vi gjør ved å avbryte rekka mindre enn absoluttverdien av det første leddet vi sløyfer. Feilen ved vår verdi av integralet er da mindre enn

$$\int_0^1\frac{1}{2^4\cdot 4!}x^8dx=\left[\frac{1}{2^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{9}x^9\right]_0^1=\underline{\frac{1}{3456}}\approx\underline{0.0003}.$$

Nøyaktigheten er altså god nok for alle praktiske formål.

5.3.2. Forenkling av kompliserte uttrykk.

I praktisk arbeid kommer vi ofte ut for uttrykk som er temmelig kompliserte. Da kan det være nyttig å erstatte disse med andre uttrykk som er *nesten* riktige, men som er atskillig enklere å arbeide med. Nedenfor ser du et kjent eksempel:

Eksempel 5.6: Innenfor relativitetsteorien er kinetiske energi gitt ved formelen

$$W = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)$$

der m_0 er massen til legemet når det er i ro, v er legemets fart, og c er lysfarten.
Vis at dette uttrykket er tilnærmet lik

$$W = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

når $v << c$.

Løsning: Vi benytter formelen for binomisk rekke med $m = -\frac{1}{2}$, og erstatter x med $-\left(\frac{v}{c}\right)^2$. Da får vi:

$$W = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right) = m_0c^2\left(\left(1-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right)$$

$$= m_0c^2\left(1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{2!}\cdot\left(-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right)^2+\cdots-1\right)$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right) = m_0v^2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right) \approx \underline{\underline{\frac{1}{2}m_0v^2}}$$

fordi de resterende leddene inneholder faktoren $\frac{v^2}{c^2}$ som er forsvinnende liten når $v << c$.

5.3.3. Bestemmelse av grenseverdier.

Du vet forhåpentlig hvordan du kan finne grenseverdier ved hjelp av L'Hôpitals regel. Men noen ganger er det lettere å bruke kjente Taylor-rekker. Teknikken illustreres i eksemplet nedenfor. Med litt trening går det mye fortere å se løsningen enn å skrive den ned.

Eksempel 5.7: Finn

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}.$$

Løsning: Setter inn rekkene for $\sin x$ og $\cos x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\right)}{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{3!}x^4+\frac{1}{5!}x^6-\cdots}{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\cdots}{\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\cdots} = \frac{1-0+0-\cdots}{\frac{1}{2}-0+\cdots} = \underline{\underline{2}}$$

5.3.4. Løsing av differensiallikninger.

Uansett hvor flink du er til å løse differensiallikninger, vil du før eller senere råke ut for likninger som ikke lar seg løse eksakt. Da kan det være lurt å anta at løsningen kan skrives som ei potensrekke, og gå på jakt etter leddene i denne rekka. Vi skal ikke fordype oss i teori, men heller illustrere teknikken med et par eksempler.

Eksempel 5.8: Finn ei potensrekke som er løsningen av disse differensiallikningene:

a) $y' + x \cdot y = 1, \quad y(0) = 1.$

b) $y' + x \cdot y = e^x, \quad y(0) = 0.$

Løsning: Vi antar at løsningen kan skrives som ei potensrekke rundt $a = 0$:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

Da blir

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots.$$

Så setter vi inn i differensiallikningen:

a) Når $y(0) = 1$, ser vi direkte at $c_0 = 1$. Innsetting gir:

$$\left(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots\right) + x\left(1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\right) = 1$$

$$c_1 + (2c_2 + 1)x + (3c_3 + c_1)x^2 + (4c_4 + c_2)x^3 + \cdots = 1$$

Denne likheten skal være oppfylt for *alle* verdier av *x*. Da må vi ha:

$$c_1 = 1.$$

$$2c_2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

$$3c_3 + c_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = -\tfrac{1}{3}c_1 = -\tfrac{1}{3} \cdot 1 = -\tfrac{1}{3}.$$

$$4c_4 + c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = -\tfrac{1}{4}c_2 = -\tfrac{1}{4} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8}.$$

Slik kan vi fortsette. De første leddene i rekka blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \cdots}}.$$

Du ser sikkert at vi får sammenhengen

$$n \cdot c_n + c_{n-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n = -\tfrac{1}{n}c_{n-2} \text{ når } n = 2, 3, 4, \cdots.$$

Siden vi vet at $c_0 = c_1 = 1$, kan vi nå sette opp formler for c_n. Vi skal ikke gjøre dette, men bare nevne at når vi har slike formler for c_n, kan vi også undersøke konvergensen av den uendelige rekka som framkommer.

b) Når $y(0) = 0$, ser vi direkte at $c_0 = 0$. Dessuten må vi benytte rekka for e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Innsetting gir:

$$\left(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots\right) + x\left(c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\right)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$c_1 + 2c_2 x + (3c_3 + c_1)x^2 + (4c_4 + c_2)x^3 + \cdots = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Denne likheten skal være oppfylt for *alle* verdier av *x*. Da må vi ha:

$$c_1 = 1.$$

$$2c_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = \tfrac{1}{2}.$$

$$3c_3 + c_1 = \tfrac{1}{2!} \quad \Leftrightarrow \quad c_3 = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2!} - c_1\right) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = -\tfrac{1}{6}.$$

$$4c_4 + c_2 = \tfrac{1}{3!} \quad \Leftrightarrow \quad c_4 = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{3!} - c_2\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{12}.$$

Slik kan vi fortsette. De første leddene i rekka blir derfor

$$y(x) = \underline{\underline{x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{12}x^4 + \cdots}}.$$

Også her er det mulig å sette opp en formel for c_n slik at vi kan undersøke konvergensen for den uendelige rekka.

Dersom vi kun er interessert i hvordan løsningen av likningene i eksemplet oppfører seg når $|x| << 1$, vil de løsningene som er funnet ovenfor ofte være tilstrekkelige. Men for å få en fullstendig og pålitelig løsning, bør vi undersøke konvergensen av rekka. Vi skal ikke komme inn på slike problem i denne lille innføringen. Vi skal heller ikke vurdere om det i det hele tatt er mulig å finne potensrekker som løser differensiallikningen.

5.4. Blandede oppgaver.

Etter alt dette er du sikkert ivrig etter å prøve deg selv på noen blandede oppgaver med løsningsforslag.