2. Generelle egenskaper for tallfølger.

2.1. Konvergens.

Vi starter med en viktig definisjon:

En tallfølge $\{a_n\}$ **konvergerer mot** $\boldsymbol{A}$

$\Updownarrow$ def.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Vi sier at en tallfølge *divergerer* dersom den ikke konvergerer.

I mange tilfeller kan vi avgjøre konvergensen ved å benytte enkle og velkjente teknikker for å bestemme grenseverdier:

***Eksempel 2.1*:** Undersøk konvergensegenskapene for tallfølgen

a) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\},\ n \in \mathbb{N}$.

b) $\left\{\frac{1}{2}n\right\},\ n \in \mathbb{N}$.

c) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\},\ n \in \mathbb{N}$.

d) $\left\{\dfrac{2n+3}{n}\right\},\ n \in \mathbb{N}$.

Løsning:

a) Vi ser at $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, slik at tallfølgen konvergerer mot 0.

b) Vi ser at når $n \to \infty$ vil også $\frac{1}{2}n \to \infty$, slik at tallfølgen divergerer.

c) Vi benytter at

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

slik at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1.$$

Tallfølgen konvergerer altså mot 1.

d) Vi multipliserer teller og nevner med $\frac{1}{n}$, og får:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\cdot\frac{1}{n}}{n\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1} = \frac{2+0}{1} = \underline{\underline{2}}.$$

Tallfølgen konvergerer altså mot 2.

Oppgave 2.1.

Noen ganger må vi bruke mer fantasi for å komme i mål:

Eksempel 2.2: Undersøk konvergensegenskapene for tallfølgen

$$\left\{\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}\right\},\; n=0,1,2,3,\cdots.$$

Løsning: Vi ser at når $n\to\infty$, får vi et "$\infty-\infty$"-uttrykk. Da kreves det en mer omfattende omforming, der vi benytter 3. kvadratsetning:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}\right)}{\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)-4n}{\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=\underline{\underline{0}}$$

Tallfølgen konvergerer altså mot 0.

Oppgave 2.2.

Det er ofte nyttig å tenke seg at tallfølgen er punkter på en kontinuerlig graf. Poenget er at når vi har en *tallfølge*, kan vi ikke bruke kjente teknikker som derivasjon og integrasjon. Men når vi definerer en *kontinuerlig funksjon*, kan vi bruke disse teknikkene. Når elementene i tallfølgen oppfattes som punkter på funksjonsgrafen, kan egenskaper ved funksjonen direkte overføres til tallfølgen. Vi går da fram på følgende måte:

For å undersøke konvergensen til en tallfølge $\{a_n\}$, definer vi en funksjon $f(x)$ slik at

$$f(n)=a_n.$$

Dersom $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, vil $\{a_n\}$ konvergere mot *A*.

Dette er mye enklere i praksis enn det ser ut til i oppskriften over, noe neste eksempel viser:

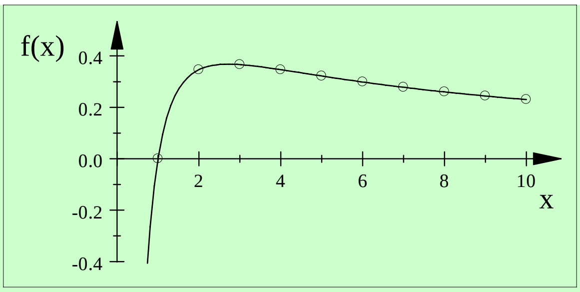
Eksempel 2.3: Undersøk konvergensen til tallfølgen

$$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\},\; n=1,2,3,\cdots.$$

*Løsning:*Her får vi et "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk, som ikke lar seg omforme på noen enkel måte. Vi definerer derfor en kontinuerlig funksjon

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},\; x>0.$$

Da vil elementene i tallfølgen bli punkter på funksjonsgrafen slik figuren nedenfor viser.



Nå kan vi bruke L'Hôpitals regel til å finne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}.$$

Da må også tallfølgen $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ konvergere mot 0.

Oppgave 2.3.

Men vi har flere redskaper til disposisjon når vi undersøker konvergensen til tallfølger, bl.a. setningene nedenfor som vi ofte benytter uten å tenke over det:

La $\{a_n\}$ være en tallfølge som konvergerer mot *A*,
mens $\{b_n\}$ er en tallfølge som konvergerer mot *B*.
La *c* være en konstant.
Da gjelder:

$\{c \cdot a_n\}$ konvergerer mot $c \cdot A$.

$\{a_n \pm b_n\}$ konvergerer mot $A \pm B$.

$\{a_n \cdot b_n\}$ konvergerer mot $A \cdot B$.

$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ konvergerer mot $\frac{A}{B}$ dersom $B \neq 0$.

Eksempel 2.4: Undersøk konvergensen til tallfølgen

$$\left\{\frac{n^2 - 3n - \ln\left(n^2\right)}{n}\right\},\; n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Løsning: Vi merker oss først at $\ln\left(n^2\right) = 2\ln n$. Da kan tallfølgen splittes opp slik:

$$\left\{\frac{n^2 - 3n - \ln\left(n^2\right)}{n}\right\} = \left\{\frac{n^2}{n} - \frac{3n}{n} - \frac{2\ln n}{n}\right\} = \{n\} - 3 - 2\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}.$$

Vi vet allerede at tallfølgen $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ konvergerer mot null. Videre ser vi at tallfølgen $\{n\}$ divergerer (leddene blir større og større), slik at den gitte tallfølgen må divergere.

Neste setning er også enklere å benytte enn å formulere:

La $\{a_n\}$ være en tallfølge som konvergerer mot *A*.
La *f* være en funksjon som er kontinuerlig i en omegn rundt *A*.
Da vil $\{f(a_n)\}$ konvergere mot $f(A)$.

Eksempel 2.5: Undersøk konvergensen til tallfølgen
$\left\{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$, $n \in N$.

Løsning: Vi ser direkte at tallfølgen $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konvergerer mot 0.
Videre er $\cos x$ kontinuerlig rundt $x = 0$.
Da vil $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergere mot $\cos 0 = \underline{\underline{1}}$.

Oppgave 2.4.

Noen ganger kommer vi bort i tallfølger der leddene kan ”klemmes inn” mellom ledd i kjente tallfølger. Vi kan lage mange setninger for slike situasjoner. Den nyttigste er:

La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to tallfølger som begge konvergerer mot *A*.
La $\{c_n\}$ være en tallfølge som er slik at $a_n \le c_n \le b_n$ for alle *n*.
Da vil også $\{c_n\}$ konvergere mot *A*.

Eksempel 2.6: Undersøk konvergensen til tallfølgen
$\left\{\dfrac{\cos^2 n + 2\sin n}{n}\right\}, n \in \mathbb{N}$.

Løsning: Vi benytter at
$$0 \le \cos^2 n \le 1 \qquad \text{og} \qquad -2 \le 2\sin n \le 2 .$$
Da er
$$-2 \le \cos^2 n + 2\sin n \le 3,$$
slik at
$$\frac{-2}{n} \le \frac{\cos^2 n + 2\sin n}{n} \le \frac{3}{n} \text{ når } n \in N .$$
Men både $\left\{-\frac{2}{n}\right\}$ og $\left\{\frac{3}{n}\right\}$ konvergerer mot 0.

Da må også $\left\{\dfrac{\cos^2 n + 2\sin n}{n}\right\}$ konvergere mot 0.

2.2. Monotoni.

Det er ofte nyttig å vite om leddene i en tallfølge blir stadig større, eller om de blir stadig mindre, eller om det ikke er noen slike systematiske tendenser. Vi definerer derfor:

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***monotont voksende***
$\Updownarrow$ def.
$a_{n+1} \geq a_n$ for alle n innenfor definisjonsmengden.

Dersom $a_{n+1} > a_n$ for alle n, sier vi at tallfølgen er ***strengt monotont voksende***.

På tilsvarende måte definerer vi *monotont avtakende* og *strengt monotont avtakende*:

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***monotont avtakende***
$\Updownarrow$ def.
$a_{n+1} \leq a_n$ for alle n innenfor definisjonsmengden.

Dersom $a_{n+1} < a_n$ for alle n, sier vi at tallfølgen er ***strengt monotont avtakende.***

Vi utelater ofte ordet *monotont* i definisjonene over, og snakker bare om *voksende* og *avtakende* tallfølger.

Vi kan undersøke monotoniegenskapene til en tallfølge på flere måter. En måte er å danne differansen $d_n = a_{n+1} - a_n$ mellom to ledd som følger etter hverandre i tallfølgen. Da har vi at:

Dersom $d_n = a_{n+1} - a_n$, blir tallfølgen $\{a_n\}$:

- Monotont voksende dersom $d_n \geq 0$ for alle *n*.
- Strengt monotont voksende dersom $d_n > 0$ for alle *n*.
- Monotont avtakende dersom $d_n \leq 0$ for alle *n*.
- Strengt monotont avtakende dersom $d_n < 0$ for alle *n*.

I praksis er det ofte enklere å danne en funksjon $f(x)$ som er slik at $f(n) = a_n$ slik vi har sett før. Da bruker vi derivasjon til å undersøke om *f* er voksende eller avtakende. Resultatet kan direkte overføres til tallfølgen $\{a_n\}$.

Eksempel 2.7: Undersøk monotoniegenskapene til tallfølgen

$$\left\{\frac{n^2-4}{n+1}\right\},\ n \in \mathbb{N}$$

på to måter:

a) Ved å beregne differansen $d_n = a_{n+1} - a_n$.

b) Ved å benytte derivasjon.

Løsning:

a) Vi får at

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2 - 4}{(n+1)+1} - \frac{n^2-4}{n+1} = \frac{n^2+2n-3}{n+2} - \frac{n^2-4}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2+2n-3)(n+1) - (n^2-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{(n^3+n^2+2n^2+2n-3n-3) - (n^3+2n^2-4n-8)}{(n+2)(n+1)} = \underline{\frac{n^2+3n+5}{(n+2)(n+1)}}$$

Siden *n* er et ikke-negativt tall, blir både teller og nevner positive slik at $d_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da er tallfølgen strengt monotont voksende.

b) Vi definerer den kontinuerlige funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}, \quad x \geq 0.$$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2-4)\cdot 1}{(x+1)^2} = \underline{\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}}.$$

Siden *x* er et ikke-negativt tall, blir både teller og nevner positive slik at $f'(x) > 0$ for alle $x \geq 0$. Da er både *f* og tallfølgen strengt monotont voksende.

Til slutt skal vi se på begrepet ***begrenset tallfølge***:

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***opptil begrenset***

$\Updownarrow$ def.

Det eksisterer en ***øvre skranke*** *M* slik at $a_n \leq M$ for alle *n*.

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***nedtil begrenset***

$\Updownarrow$ def.

Det eksisterer en ***nedre skranke*** *m* slik at $a_n \geq m$ for alle *n*.

En tallfølge $\{a_n\}$ er ***begrenset***

$\Updownarrow$ def.

Det eksisterer et tall *K* slik at $|a_n| \leq K$ for alle *n*.

Eksempel 2.8: Undersøk om tallfølgen

$$\left\{\frac{2n}{2n+3}\right\},\ n\in\mathbb{N}$$

er begrenset.

Løsning: Det er lurt å starte med å undersøke monotoniegenskapene. Vi danner derfor funksjonen

$$f(x)=\frac{2x}{2x+3},\ x\geq 1.$$

$$f'(x)=\frac{2(2x+3)-2x\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{6}{(2x+3)^2}>0.$$

Vi ser at *f* er strengt voksende. Da er også tallfølgen

$$\left\{\frac{2n}{2n+3}\right\},\ n\in\mathbb{N}$$

strengt monotont voksende. Laveste verdi for tallfølgen blir da

$$a_1=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1+3}=\frac{2}{5}$$

slik at det eksisterer en nedre skranke $m=\frac{2}{5}$. Ethvert tall mindre enn $\frac{2}{5}$ kan også benyttes som nedre skranke. Videre ser vi at

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot\frac{1}{n}}{(2n+3)\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{3}{n}}=\frac{2}{2+0}=\underline{\underline{1}}$$

slik at tallfølgen konvergerer mot 1. Men når tallfølgen er voksende og konvergerer mot 1, må ethvert tall $M\geq 1$ være en øvre skranke. Når tallfølgen har både øvre og nedre skranke, må tallfølgen være begrenset.

Eksemplet over illustrerer en viktig sammenheng mellom konvergens og monotoni:

For en **monoton** tallfølge gjelder at:
Tallfølgen er konvergent
$\Updownarrow$
Tallfølgen er begrenset

Det er faktisk ganske kronglete å gi et generelt bevis for setningen, og vi skal droppe det.

Oppgave 2.5.

Til slutt skal vi jobbe oss gjennom et eksempel der vi bruker flere egenskaper ved tallfølger. Eksemplet er litt komplisert, men det viser hvor mye vi egentlig kan finne ut om en tallfølge ved å bruke våre kunnskaper (og litt kreativitet).

Eksempel 2.9: En tallfølge er gitt rekursivt ved

$$a_{n+1}=\tfrac{1}{3}a_n+4,\ n\in\mathbb{N}.$$

Undersøk monotoniegenskaper og konvergens for denne tallfølgen.

Løsning: Her er det påfallende at vi ikke kjenner noe startledd i tallfølgen. Kan vi da si noe om monotoni og konvergens?

Vi starter med å beregne differensen

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \left(\tfrac{1}{3}a_n + 4\right) - a_n = \underline{4 - \tfrac{2}{3}a_n}\,.$$

Vi vet at tallfølgen er monotont voksende dersom

$$d_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \tfrac{2}{3}a_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n \leq 6}\,.$$

Men da er

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + 4 \leq \tfrac{1}{3}\cdot 6 + 4 = 2 + 4 = 6\,,$$

slik at $M = 6$ blir en øvre skranke. Tallfølgen er derfor monotont voksende og opptil begrenset, slik at den må konvergere dersom ett av leddene er $a_n \leq 6$.

Vi ser også at tallfølgen er monotont avtakende dersom

$$d_n \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \tfrac{2}{3}a_n \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n \geq 6}\,.$$

På samme måte som ovenfor kan vi vise at dersom ett av leddene $a_n \geq 6$, blir tallfølgen nedtil begrenset. Vis det! Siden den også er monotont avtakende, må den konvergere også da.

Vi har altså vist at tallfølgen alltid konvergerer. Men hva konvergerer den mot? Vi setter at den konvergerer mot *A*. Da er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A\,.$$

Siden $a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + 4$, får vi av grenseverdisetningene at

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{3}a_n + 4\right) = \tfrac{1}{3}\lim_{n\to\infty} a_n + 4 \quad \Leftrightarrow \quad A = \tfrac{1}{3}A + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2}{3}A = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A = 6}}\,.$$

Altså har vi vist at tallfølgen konvergerer mot 6 uten å kjenne et eneste ledd i tallfølgen, bare ved å kjenne sammenhengen mellom etterfølgende ledd.

Nå bør du være godt rustet til å gå løs på *rekker*.