3. Generelt om rekker.

3.1. Bruk av summetegn.

Dersom vi summerer leddene i en tallfølge, får vi ei *rekke*. Slike rekker skriver vi gjerne ved hjelp av *summetegn*. Dersom vi summerer et *endelig* antall ledd, skriver vi

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n .$$

Merk at siden første ledd er a_0, vil denne rekka få $n+1$ ledd.

Dersom vi summerer *uendelig* mange ledd, skriver vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

I summene ovenfor brukte vi *k* som summasjonsindeks. Vi bruker ofte andre bokstaver, som *i*, *j*, *m*, *n*, *p* osv.

Eksempel 3.1: Skriv disse rekkene ledd for ledd:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2+1}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Løsning:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} .$

b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{4} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2+1} = \frac{(-1)^1}{0^2+1} + \frac{(-1)^2}{1^2+1} + \frac{(-1)^3}{2^2+1} + \frac{(-1)^4}{3^2+1} + \frac{(-1)^5}{4^2+1} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} .$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^0}{2\cdot 0+1} + \frac{(-1)^1}{2\cdot 1+1} + \frac{(-1)^2}{2\cdot 2+1} + \frac{(-1)^3}{2\cdot 3+1} + \cdots = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Legg merke til den siste rekka i eksemplet ovenfor. Når vi har skrevet ut såpass mange ledd i ei uendelig rekke at det er "opplagt" hvordan systemet er, skriver vi ofte bare prikker for å markere at rekka inneholder uendelig mange ledd. Noen ganger skriver vi også formelen for ledd nr *n*, slik at rekka i eksempel c) ovenfor blir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{(-1)^0}{2\cdot 0+1} + \frac{(-1)^1}{2\cdot 1+1} + \frac{(-1)^2}{2\cdot 2+1} + \frac{(-1)^3}{2\cdot 3+1} + \cdots = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots .$$

Oppgave 3.1.

Legg spesielt merke til definisjonen av ***n-fakultet*** nedenfor:

Produktet ***n-fakultet*** skrives $n!$, og defineres slik:

$$n! \overset{\text{def.}}{=} 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n \text{ når } n\in\mathbb{N}, \qquad 0!=1$$

Vi kan også benytte en rekursiv definisjon:

$$0!=1, \qquad n!=(n-1)!\cdot n.$$

Eksempel 3.2: Skriv de 4 første leddene i disse rekkene:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$

Løsning:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{4}{1\cdot 2}+\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots=\underline{\underline{1+2+2+\tfrac{4}{3}+\cdots}}.$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}=\frac{0!}{0!}+\frac{1!}{(2\cdot 1)!}+\frac{2!}{(2\cdot 2)!}+\frac{3!}{(2\cdot 3)!}+\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$

$$=\underline{\underline{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{120}+\cdots}}$$

Oppgave 3.2.

I eksemplene ovenfor tok vi utgangspunkt i ei rekke skrevet med summetegn, og skrev ut de første leddene i rekka. La oss se på det motsatte problemet: Vi har skrevet ut så mange ledd i ei uendelig rekke at vi ser systemet, og skal skrive rekka ved hjelp av summetegn. Dette problemet har faktisk ikke noen entydig løsning, noe eksemplene nedenfor illustrerer:

Eksempel 3.3: Skriv de uendelige rekkene nedenfor med summetegn, gjerne på forskjellige måter:

a) $\displaystyle\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{16}+\frac{4}{25}+\cdots$

b) $\displaystyle\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$

Løsning:

a) Vi ser at tellerne er de naturlige tallene fra 1 og oppover, mens nevnerne er kvadratene av naturlige tall fra 2 og oppover. Dette kan vi uttrykke for eksempel på de tre måtene som er vist nedenfor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k^2}, \qquad \sum_{p=0}^{\infty}\frac{p+1}{(p+2)^2}.$$

b) Her skifter teller mellom $+1$ og -1, noe vi kan få til med faktoren $(-1)^n$ der $n\in\mathbb{N}$. Vi kan forresten også få det til med faktoren $\cos(n\pi)$ der $n\in\mathbb{N}$. Dersom vi er påpasselige med at første ledd får rett fortegn, kan vi uttrykke rekka for eksempel på de fire måtene som er vist nedenfor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k+2}, \qquad \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^{p}}{p}, \qquad \sum_{p=2}^{\infty}\frac{\cos(p\cdot\pi)}{p}.$$

Oppgave 3.3.

3.2. Konvergens av rekker.

La oss starte med et lite eksempel: En dag stiller du deg 2.00 meter fra en vegg, og går mot veggen. Først går du halve avstanden til veggen, d.v.s. 1.00 meter. Så går du halvparten av gjenværende avstand, d.v.s. 0.50 meter. Slik fortsetter du med å gå halvparten av gjenværende avstand inn mot veggen. Det er da innlysende at:

- Den samlede strekningen du går er

  $$1.00\,\text{m}+0.50\,\text{m}+0.25\,\text{m}+0.125\,\text{m}+\cdots.$$

  Dersom vi ser bort fra benevningen *meter*, kan denne rekka skrives slik:

  $$1.00+1.00\cdot\tfrac{1}{2}+1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}1.00\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

- Du vil aldri komme helt fram til veggen, siden det alltid er halvparten av gjenværende avstand igjen. Det vil si at du tilbakelegger en strekning som er mindre enn 2.00 meter. Men du kan komme så nær veggen du vil ved å gå tilstrekkelig mange skritt.

Eksemplet over illustrerer at selv om vi legger sammen uendelig mange positive ledd, kan summen gå mot et fast tall (i vårt eksempel mot 2). Vi sier at rekka ***konvergerer mot 2***.

Dermed har vi bakgrunnen for en naturlig definisjon:

$$\text{Rekka } \sum_{k=1}^{\infty}a_k \ \textbf{\textit{konvergerer mot S}}$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=S.$$

Dersom rekka ikke konvergerer, sier vi at den ***divergerer***.

Merk forskjellen mellom konvergens av *tallfølger* og konvergens av *rekker*. En *tallfølge* konvergerer dersom *ledd* nr. n går mot en fast verdi, mens ei *rekke* konvergerer dersom *summen av leddene* går mot en fast verdi.

Rekka i eksemplet vårt er egentlig ei *geometrisk rekke*. En annen vanlig type rekke er de *aritmetiske rekkene*. Geometriske og aritmetiske rekker forekommer ofte, og danner også grunnlaget for andre rekker. Selv om du forhåpentlig kjenner disse rekkene fra før, vil jeg anbefale at du frisker opp dine kunnskaper ved å ta en titt på notatene om slike rekker.

Den velkjente historien om **Akilles og skilpadda** (Zenons paradoks) er egentlig en mer komplisert variant av vårt innledende eksempel.

Dersom du vil gjennomføre eksperimentet i praksis, må du jo avslutte før eller siden. Dersom du avslutter etter *n* skritt, har du gått en strekning

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1.00 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Denne summen kalles for ***den n'te partialsummen*** av rekka $\sum_{k=1}^{\infty} 1.00 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$. Generelt definerer vi:

Gitt ei uendelig rekke $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Den *n*'te partialsummen av denne rekka er $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Vi er som regel mest interessert i uendelige rekker. Dersom vi bare sier *rekke*, er det nesten alltid uendelig rekke vi mener dersom det ikke framgår av sammenhengen at rekka har et endelig antall ledd. Når vi jobber med slike uendelige rekker, vil vi alltid være interessert i å fastlegge konvergensegenskapene. Da har vi ofte bruk for setningen nedenfor:

La $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ være den *n*'te partialsummen til rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer mot S

$\Updownarrow$ def.

S_n konvergerer mot S.

***Eksempel 3.4*:** Undersøk konvergensen til rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \cdots.$$

Løsning: Ved hjelp av delbrøkoppspalting får vi at

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Da kan rekka skrives som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \cdots$$

Den *n*'te partialsummen blir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \underline{\frac{1}{n+1}}.$$

Vi ser at

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{0}{1+0} = \underline{1}$$

slik at rekka konvergerer mot 1.

Oppgave 3.4.

I det innledende eksemplet og i Eksempel 3.4 ovenfor ble leddene i den uendelige rekka stadig mindre, og konvergerte mot null. Denne egenskapen er et absolutt krav for at rekka skal kunne konvergere. Vi har altså at:

Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer

$\Downarrow$

Tallfølgen $\{a_k\}$ konvergerer mot 0.

Merk at implikasjonspila bare går en vei. Vi skal etter hvert se eksempler der tallfølgen $\{a_k\}$ konvergerer mot null, mens den tilhørende rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer.

Selv om implikasjonen ovenfor egentlig er innlysende, kan vi spandere på oss et formelt bevis. Fra definisjonen av partialsum får vi at

$$S_n = S_{n-1} + a_n .$$

Så lar vi $n \to \infty$. Siden rekka konvergerer, er

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S .$$

Da blir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_{n-1} + a_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Rightarrow \quad S = S + \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Og det er jo nettopp definisjonen på at tallfølgen konvergerer mot 0.

Det kan være nyttig å sette opp setningen over på denne formen:

Tallfølgen $\{a_k\}$ konvergerer *ikke* mot 0

$\Downarrow$

Rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer.

I eksemplene ovenfor har vi klart å finne ut *hva* rekkene konvergerte mot. Men i de fleste tilfellene må vi begrense oss til å avgjøre *om* ei gitt rekke konvergerer eller divergerer, uten å finne *hva* rekka eventuelt konvergerer mot. Vi har da en rekke *konvergenskriterier* til disposisjon. Men før du går løs på disse kriteriene, vil jeg anbefale at du tar en titt på geometriske rekker, og helst også aritmetiske rekker.