4. Potensrekker.

4.1. Introduksjon.

Potensrekker er et av de mest spennende feltene av matematikken, fullt av overraskelser. Etter hvert skal vi blant annet vise at

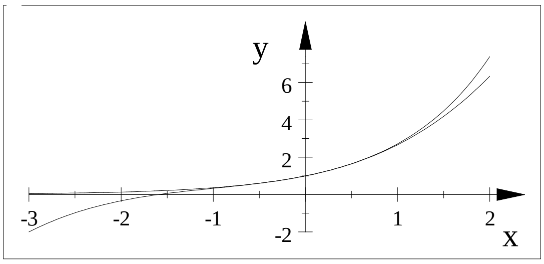
$$e^x \equiv 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}x^k$$

$$\cos x \equiv 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \cdots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

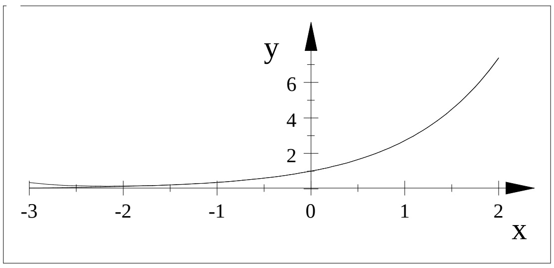
$$\sin x \equiv x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

La du merke til at jeg brukte *identitetstegnet* $\equiv$ istedenfor det vanlige likhetstegnet = i uttrykkene ovenfor? Vanligvis bruker vi bare =, men her benyttet jeg $\equiv$ for å understreke at den uendelige rekka er *identisk* med funksjonen foran $\equiv$ for alle verdier av *x*, på samme måte som $(x+1)^2$ er *identisk* med $x^2 + 2x + 1$, d.v.s. at de to uttrykkene kan benyttes om hverandre etter behov.

Synes du det virker merkelig at en funksjon som $f(x) = e^x$ kan erstattes av et polynom i *x*, selv om dette polynomet får uendelig mange ledd? Se på figurene nedenfor:



Tykk strek: e^x. Tynn strek: $\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}x^k$.



Tykk strek: e^x. Tynn strek: $\sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}x^k$.

Til venstre er grafen til $f(x) = e^x$ tegnet sammen med summen av de fire første leddene i rekka for e^x. Du ser at grafene er temmelig like når *x* ligger mellom -1 og 1. Til høyre er grafen til $f(x) = e^x$ tegnet sammen med summen av de sju første leddene i rekka for e^x. Da faller grafene sammen helt til de begynner å sprike nær $x = -3$. Det virker kanskje ikke så urimelig at funksjonene blir like når vi tar med uendelig mange ledd i rekka.

Men hva er hensikten med å erstatte greie funksjoner som e^x, $\cos x$ eller $\sin x$ med uendelige rekker? Et foreløpig svar kan være at slike rekker viser seg å være gunstig i de utroligste situasjonene. Eksemplene nedenfor viser to slike situasjoner.

Eksempel 4.1: Finn en tilnærmet verdi for det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

Løsning: Det er ikke mulig å løse det tilhørende ubestemte integralet. Vi må derfor nøye oss med tilnærmingsverdi for det bestemte integralet. Simpsons metode kan selvsagt brukes, men vi har en mye bedre metode til disposisjon. Vi bruker rekka for $\cos x$, og får:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\cdots\right)}{x^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6-\frac{1}{8!}x^8+\cdots}{x^2} = \underline{\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4-\frac{1}{8!}x^6+\cdots}$$

Da blir

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4-\frac{1}{8!}x^6+\cdots\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2!}x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 - \left[\frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{7}x^7\right]_0^1 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{72}+\frac{1}{3600}-\frac{1}{282\,240}+\cdots$$

Du innser sikker at tallrekka i svaret ovenfor er en alternerende rekke der absoluttverdien av leddene konvergerer mot null. Da vet vi at feilen vi gjør ved å kutte rekka, er mindre enn absoluttverdien av det første leddet vi utelater. Det vil si at dersom vi tar med bare de tre første leddene i rekka, får vi at

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{72}+\frac{1}{3600} \approx \underline{\underline{0.486389}}$$

med en nøyaktighet som er bedre enn $\frac{1}{282\,240} \approx 0.000004$.

Oppgave 4.1.

Når du jobber med komplekse tall, har du ofte bruk for identiteten

$$e^{ix} \equiv \cos x + i\cdot\sin x.$$

Hittil har vi bare sagt at "slik er det". Nå er det på tide å vise at identiteten virkelig stemmer.

Eksempel 4.2: Vis at identiteten

$$e^{ix} \equiv \cos x + i\cdot\sin x$$

stemmer.

Løsning: Vi erstatter x med ix i rekka for e^x, bruker likhetstegn istedenfor $\equiv$, og får

$$e^{ix} = 1+ix+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\frac{1}{5!}(ix)^5+\frac{1}{6!}(ix)^6+\frac{1}{7!}(ix)^7+\cdots$$
$$= 1+i\cdot x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}i\cdot x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}i\cdot x^5-\frac{1}{6!}x^6-\frac{1}{7!}i\cdot x^7+\cdots$$
$$= \left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)+i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\right)$$
$$= \underline{\cos x + i\cdot\sin x}$$

Merk at omstokkingen av leddene strengt tatt forutsetter at rekka konvergerer absolutt.

Ved nærmere ettertanke har du kanskje vært borti situasjoner der en funksjon av x er lik en uendelig rekke tidligere. Du har kanskje sett rekka

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

Dette er ei geometrisk rekke der første ledd er $a_1 = 1$ og kvotienten er $k = x$. Du vet at slike rekker konvergerer når $|k| < 1$, d.v.s. når $-1 < x < 1$. Da er summen

$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-x}.$$

Med andre ord,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \text{ forutsatt at } -1 < x < 1.$$

Nå håper jeg at du sitter igjen med mange gode spørsmål, for eksempel:

- Hvordan har vi kommet fram til rekkene for e^x, $\cos x$ og $\sin x$?
- Hvordan kan vi vite at rekkene for e^x, $\cos x$ og $\sin x$ konvergerer for alle verdier av x, mens rekka for $\frac{1}{1-x}$ bare konvergerer for $-1 < x < 1$?
- Kan vi finne tilsvarende rekker for andre funksjoner? I så fall, hvordan kan vi avgjøre konvergensen av slike rekker?
- Hva kan vi bruke slike rekker til?

Noen svar på slike spørsmål finner du i resten av dette notatet om potensrekker.

4.2. Definisjoner.

La oss starte helt fra begynnelsen av. Vi skal studere rekker der leddene inneholder en fri variabel *x*. Vi skal konsentrere oss om ***potensrekker***, som er rekker som inneholder *x* i stadig høyere potens. I sin enkleste form ser disse rekkene lik ut:

> Ei rekke av formen
> $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$
> kalles ei **potensrekke i *x***.

Du ser sikkert at rekkene for e^x, $\cos x$, $\sin x$ og $\frac{1}{1-x}$ er slike potensrekker.

Men vi får ofte bruk for en mer generell form:

> Ei rekke av formen
> $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$
> kalles ei **potensrekke i (*x* – *a*)**.

Vi skal nå se på noen egenskaper ved slike rekker. Deretter skal vi vise hvordan vi kan finne rekkene for e^x, $\cos x$, $\sin x$ og andre funksjoner av *x*, og vi skal se mer på hva slike rekker kan brukes til.

4.3. Konvergens av potensrekker.

Potensrekkene skiller seg fra de rekkene vi har sett på hittil ved at de inneholder en fri variabel *x*. Vi må da forvente at konvergensegenskapene avhenger av verdien av denne variabelen.

Etter hvert som du jobber med potensrekker, vil du innse at slike rekker har de konvergens-egenskapene som er angitt i ramma nedenfor:

Ei potensrekke $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ har en og kun en av disse egenskapene:

1. Rekka konvergerer kun for $x = a$.
2. Rekka konvergerer absolutt for alle verdier av *x*.
3. Det fins et intervall $I = \langle a-\rho,\ a+\rho \rangle$ som er slik at rekka konvergerer absolutt når $x \in I$.
   Det er også mulig at rekka konvergerer i ett eller begge endepunktene av *I*.

Størrelsen ρ kalles ***rekkas konvergensradius***, og *I* (eventuelt med tillegg av endepunkter der rekka konvergerer) kalles ***rekkas konvergensområde*** eller ***konvergensintervall***.

Jeg vil sterkt anbefale at du går gjennom beviset nedenfor, blant annet fordi beviset skisserer opp hvordan vi går fram når vi undersøker konvergensen for slike rekker. Vi starter med forholdskriteriet, og beregner størrelsen

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}(x-a)^{k+1}}{c_k (x-a)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}(x-a)}{c_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \cdot |x-a| .$$

Nå husker du sikkert at rekka konvergerer absolutt når $L < 1$. Vi må da skille mellom disse tre situasjonene:

1. Dersom $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|$ ikke eksisterer, konvergerer rekka kun når $x = a$ slik at $L = 0$. Da er alle leddene i rekka lik 0.
2. Dersom $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = 0$, er $L = 0$ for alle verdier av *x*. Rekka konvergerer da absolutt for alle verdier av *x*.
3. Dersom $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|$ eksisterer og er forskjellig fra 0, konvergerer rekka absolutt når

   $$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \cdot |x-a| < 1 .$$

   Vi innfører nå konvergensradien ρ ved å sette

   $$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \frac{1}{\rho} .$$

   Da konvergerer rekka absolutt når

$$\tfrac{1}{\rho}\cdot|x-a|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-a|<\rho \quad\Leftrightarrow\quad -\rho<x-a<\rho \quad\Leftrightarrow\quad \underline{a-\rho<x<a+\rho}.$$

Når vi undersøker konvergens med forholdskriteriet, kan vi få stygge brudne brøker. Dersom du ikke liker å regne med brudne brøker, bør du huske at å dele på en brøk er ekvivalent med å gange med den omvendte brøken. Jeg har benyttet denne framgangsmåten i eksemplene nedenfor.

I et par av eksemplene kommer du ut for fakultetsuttrykk. Husk da at $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$, og at $0!=1$.

Eksempel 4.3: Undersøk konvergensen til disse rekkene:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}x^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k!\cdot(x-2)^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}(x-1)^k$

Løsning:

a) Bruker forholdskriteriet, og beregner størrelsen

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}}{\frac{2^k}{k!}x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2x\cdot k!}{k!\cdot(k+1)}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2}{k+1}x\right|.$$

Men $\frac{2}{k+1}\to 0$ når $k\to\infty$. Altså er $L<1$ for alle verdier av *x*, og rekka konvergerer absolutt for alle verdier av *x*.

b) Bruker forholdskriteriet, og beregner størrelsen

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!(x-2)^{k+1}}{k!\cdot(x-2)^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!\cdot(k+1)\cdot(x-2)}{k!}\right|=\lim_{k\to\infty}|(k+1)\cdot(x-2)|.$$

Vi ser at $L\to\infty$ når $k\to\infty$. Altså konvergerer rekka kun når $x=2$ (da er alle leddene lik null) og divergerer for alle andre verdier av *x*.

c) Bruker forholdskriteriet, og beregner størrelsen

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)^2}(x-1)^{k+1}}{\frac{2^k}{k^2}(x-1)^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(x-1)^{k+1}}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2}{2^k(x-1)^k}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^2}{(k+1)^2}(x-1)\right|=2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\cdot|x-1|=2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2\cdot|x-1|=2\cdot 1\cdot|x-1|$$

Rekka konvergerer når

$$L<1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot|x-1|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-1|<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}<x-1<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{3}{2}}.$$

Til slutt må vi undersøke endepunktene:

$x = \frac{1}{2}$: Rekka blir nå

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}\left(\frac{1}{2}-1\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

som konvergerer absolutt.

$x = \frac{3}{2}$: Rekka blir nå

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}\left(\frac{3}{2}-1\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

som også konvergerer absolutt.

Altså vil rekka konvergere absolutt når

$$\underline{\underline{\tfrac{1}{2} \le x \le \tfrac{3}{2}}}.$$

Oppgave 4.2.

Hovedpoenget ved dette temaet er at en funksjon av *x* kan være identisk med en potensrekke når *x* ligger innenfor et konvergensintervall. Formelt bør vi si at:

”Potensrekka $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$ når $x \in \langle a-\rho, a+\rho \rangle$”

Men i praksis bruker vi ofte den enklere formuleringen:

”$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = f(x)$ når $x \in \langle a-\rho, a+\rho \rangle$”.

Selv om den første formuleringen er mest korrekt, er det ofte nyttigere å benytte likhetstegnet (egentlig et identitetstegn) mellom rekka og den funksjonen som rekka konvergerer mot når *x* ligger innenfor konvergensintervallet.

4.4. Regning med potensrekker.

Vi kan manipulere slike rekker på mange måter. Vi kan for eksempel integrere eller derivere rekkene slik setningene nedenfor angir:

Anta at rekka

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = f(x)$$

når *x* tilhører et konvergensintervall $\langle a-\rho, a+\rho \rangle$.

Da kan vi:

1. Derivere ledd for ledd, og får at

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k (x-a)^{k-1} = f'(x).$$

2. Integrere ledd for ledd, og får at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} = \int_a^x f(t)\,dt .$$

Konvergensen gjelder når $x \in \langle a-\rho, a+\rho \rangle$.
Endepunktene av konvergensintervallet må undersøkes spesielt.

Det er forholdsvis enkelt å bruke forholdskriteriet til å vise at de tre rekkene $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k (x-a)^{k-1}$ og $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$ har samme konvergensradius ρ. Det er atskillig verre å vise at når $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$, vil de andre to rekkene konvergerer mot henholdsvis $f'(x)$ og $\int_a^x f(t)\,dt$, og vi skal derfor hoppe over beviset.

La oss se et par eksempler på hva dette kan brukes til:

***Eksempel 4.4*:** Ta utgangspunkt i at

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{når } -1 < x < 1.$$

Finn de rekkene som framkommer når du
a) deriverer ledd for ledd
b) integrerer ledd for ledd.

Finn også de funksjonene som de nye rekkene konvergerer mot, og bestem konvergens-områdene.

Løsning:
a) Deriverer ledd for ledd, og får at

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{0 \cdot (1-x) - 1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \underline{\frac{1}{(1-x)^2}} .$$

Må undersøke konvergensen i endepunktene:
$x = -1$: Rekka blir $1 - 2 + 3 - \cdots$ som åpenbart divergerer.
$x = 1$: Rekka blir $1 + 2 + 3 + \cdots$ som åpenbart divergerer.
Altså ser vi at

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \underline{\underline{\frac{1}{(1-x)^2}}} \quad \text{når } -1 < x < 1.$$

b) Integrerer ledd for ledd, og får at

$$x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \cdot x^k = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$$
$$= -\left[\ln(1-t)\right]_0^x = -\ln(1-x) + \ln 1 = \underline{-\ln(1-x)} .$$

Må undersøke konvergensen i endepunktene:

$x=-1$: Rekka blir $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$ som konvergerer (alternerende rekke).

$x=1$: Rekka blir $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ som divergerer (harmonisk rekke).

Altså ser vi at

$$x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{k}\cdot x^k=\underline{\underline{-\ln(1-x)}} \text{ når } -1\le x<1.$$

Vi har tidligere sagt at den alternerende harmoniske rekka konvergerer, men vi har ikke sagt hva denne rekke konvergerer mot. Det skal vi gjøre nå. I del b) av eksemplet ovenfor har vi bl.a. funnet at

$$x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+\cdots=-\ln(1-x) \text{ når } -1\le x<1.$$

Siden rekka også konvergerer når $x=-1$, setter vi denne verdien inn i rekka, og får

$$-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\cdots=-\ln\big(1-(-1)\big) \quad\Leftrightarrow\quad 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}-+\cdots=\underline{\underline{\ln 2}}.$$

Den alternerende harmoniske rekka konvergerer altså mot $\ln 2$.

Men vi trenger ikke å nøye oss med å derivere eller integrere rekker. Vi kan også multiplisere rekker med funksjoner av *x*. Resultatet finner du i ramma nedenfor:

Anta at rekka $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$

når *x* tilhører et konvergensintervall $\langle a-\rho,\, a+\rho\rangle$.

Da vil $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot g(x)\cdot(x-a)^k$ konvergerer mot $g(x)\cdot f(x)$

innenfor samme konvergensintervall.

Eksempel 4.5: Finn summen av rekka nedenfor, med tilhørende konvergensintervall:

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^k.$$

Bruk resultatet til å finne summen (med konvergensintervall) av rekka

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}x+\tfrac{3}{4}x^2+\tfrac{4}{5}x^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{k}{k+1}x^{k-1}.$$

Løsning: Fra Eksempel 4.4a har vi at

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2} \text{ når } -1<x<1.$$

Multipliserer med *x*, og får

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^k=\underline{\underline{\frac{x}{(1-x)^2}}} \text{ når } -1<x<1.$$

Så integrerer jeg ledd for ledd, og får at

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^3 + \tfrac{4}{5}x^5 + \cdots = \int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}\,dt\,.$$

Integralet løses med substitusjonen

$$1-t=u \quad \Leftrightarrow \quad t=1-u \quad \Leftrightarrow \quad dt=-du\,.$$

Tilpasser grensene til den nye integrasjonsvariabelen, og får

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}\,dt = \int_1^{1-x} \frac{1-u}{u^2}(-du) = \int_1^{1-x}\left(-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right)du = \left[\frac{1}{u}+\ln|u|\right]_1^{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \ln(1-x) - \frac{1}{1} - \ln 1 = \frac{1-(1-x)}{1-x} + \ln(1-x) = \underline{\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)}$$

Vi samler trådene så langt, og ser at

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{4}{5}x^5 + \cdots = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\,.$$

Nå gjenstår det bare å dele på x^2:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{4}{5}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{k}{k+1}x^{k-1} = \underline{\underline{\frac{1}{(1-x)x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}}}\,.$$

Til slutt må vi se på konvergensintervallet. Vi vet allerede at rekka konvergerer når $-1<x<1$. Men vi må også sjekke endepunktene. Da ser vi at når $x=\pm 1$, vil absoluttverdien av leddene i rekka gå mot 1 når $k\to\infty$. Men vi vet at dersom ei rekke konvergerer, må absoluttverdien av leddene gå mot 0 når $k\to\infty$. Rekka konvergerer derfor ikke i endepunktene, slik at konvergensintervallet blir $\underline{\underline{-1<x<1}}$.

(En liten tilleggsoppgave: Vis at

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(1-x)x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}).$$

Oppgave 4.3.

En annen nyttig operasjon er å erstatte x i en potensrekke med et annet uttrykk. Da får vi en ny rekke, som har en ny sum (egentlig: konvergerer mot en ny funksjon). Nedenfor ser du et par eksempler.

Eksempel 4.6: Sett opp potensrekker for

a) $f(x)=e^{-x}$.

b) $f(x)=\sin(2x)$.

Løsning:

a) Vi tar utgangspunkt i rekka for e^x:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{k!}x^k\,.$$

Så erstatter vi x med $-x$, og får

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \tfrac{1}{2!}(-x)^2 + \tfrac{1}{3!}(-x)^3 + \tfrac{1}{4!}(-x)^4 + \cdots$$

$$= 1 - x + \tfrac{1}{2!}x^2 - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k}}$$

b) Vi tar utgangspunkt i rekka for $\sin x$:

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Så erstatter vi x med $2x$:

$$\sin(2x) = 2x - \tfrac{1}{3!}(2x)^3 + \tfrac{1}{5!}(2x)^5 - \tfrac{1}{7!}(2x)^7 + \cdots$$

$$= 2x - \tfrac{2^3}{3!}x^3 + \tfrac{2^5}{5!}x^5 - \tfrac{2^7}{7!}x^7 + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}}}$$

Oppgave 4.4.

Noen ganger lønner det seg å være litt mer omstendelig når vi erstatter x med et annet uttrykk, noe neste eksempel viser.

Eksempel 4.7: Finn ei potensrekke for $\ln x$ med tilhørende konvergensintervall.

Løsning: Vi går tilbake til Eksempel 4.4b, der vi fant at

$$x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \cdot x^k = -\ln(1-x) \quad \text{når } -1 \le x < 1.$$

Vi starter med å bytte ut x med u samtidig som vi skifter fortegn:

$$\ln(1-u) = -u - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 - \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \cdot u^k \quad \text{når } -1 \le u < 1.$$

Så setter vi

$$1 - u = x \quad \Leftrightarrow \quad u = 1 - x = -(x-1),$$

og får

$$\ln x = -(-(x-1)) - \tfrac{1}{2}(-(x-1))^2 - \tfrac{1}{3}(-(x-1))^3 - \tfrac{1}{4}(-(x-1))^4 - \cdots$$

$$= (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k}}$$

Dette er en potensrekke i $(x-1)$. Finner konvergensintervallet:

$$-1 \le u < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le 1 - x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le -x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{0 < x \le 2}}.$$

Det fins mange flere setninger om potensrekker. Vi kan bl.a. multiplisere potensrekker:

Anta at rekka $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ konvergerer mot $f(x)$ når x tilhører et konvergensintervall $\langle a-\rho_1,\, a+\rho_1 \rangle$,

og at rekka $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$ konvergerer mot $g(x)$ når x tilhører et konvergensintervall $\langle a-\rho_2,\, a+\rho_2 \rangle$.

Da vil

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

konvergere mot $f(x) \cdot g(x)$, og konvergensradien er $\rho = \mathrm{Min}(\rho_1,\, \rho_2)$.

Til slutt en setning om entydighet av potensrekker:

To potensrekker $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ og $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$ med samme konvergens-intervall $\langle a-\rho,\, a+\rho \rangle$ konvergerer mot samme funksjon $f(x)$

$$\Updownarrow$$

$c_k = b_k$ for alle $k = 0, 1, 2, \cdots$

Nå gjenstår bare hovedproblemet: Hvordan finner vi potensrekka til en vilkårlig funksjon $f(x)$? Dette problemet skal vi ta opp i notatet om *Taylor-rekker*.