3.3. Noen konvergenskriterier.

3.3.1. Generelle merknader.

Det er ganske vanlig at vi må nøye oss med å avgjøre *om* ei rekke konvergerer, uten å finne *hva* rekka eventuelt konvergerer mot. Vi har da til disposisjon en rekke ***konvergenskriterier***. Vi skal nå se på de viktigste av disse.

Før du i det hele tatt benytter et konvergenskriterium, bør du forvisse deg om at $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.
Dersom denne grenseverdien ikke er lik null, eller grenseverdien ikke eksisterer, kan du være sikker på at rekka divergerer.

Når du går gjennom konvergenskriteriene, må du merke deg hvilke krav som må være oppfylt for at kriteriet skal kunne anvendes. Men vær klar over at det spiller ingen rolle om kravene ikke er oppfylt for noen av de første leddene av rekka. Vi kan da skille ut disse første leddene i en egen *endelig* rekke, som alltid har en *endelig* sum. Deretter går vi løs på de resterende leddene, som da vil utgjøre en uendelig rekke der kravene er oppfylt. Vi sier gjerne at vi kun er interessert i ”*halen*” til rekka. Dette innebærer at formuleringer av typen ”… for alle hele tall $k \geq 1$…” kan oppfattes som ”… det eksisterer et endelig tall N slik at kravene er oppfylt for alle hele tall $k \geq N$ …”.

3.3.2. Integralkriteriet.

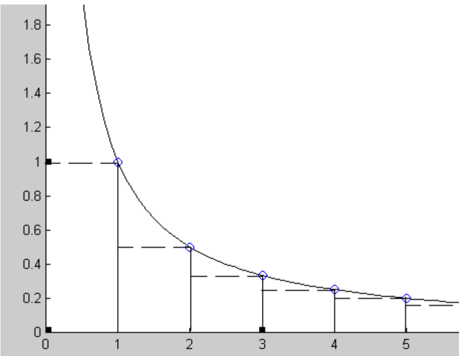
Dette er et konvergenskriterium som gjelder i dette spesielle tilfellet:

La $\{a_n\}$ være en monotont avtakende tallfølge som konvergerer mot null, der alle leddene er positive.
La $f(x)$ være en funksjon som er kontinuerlig og avtakende for $x \geq 1$, og som er slik at $f(n) = a_n$..
Da gjelder:

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergerer} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ konvergerer}$$

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ divergerer} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ divergerer}$$

Bevis:



Vi skal først bruke figuren til venstre til å vise at

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergerer} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty a_k \text{ konvergerer.}$$

Figuren framstiller grafen til en funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig og avtakende for $x \geq 1$, og som er slik at $f(n) = a_n$. Du ser sikkert at arealet av søyle nr. n er $a_n \cdot 1 = a_n$, og at

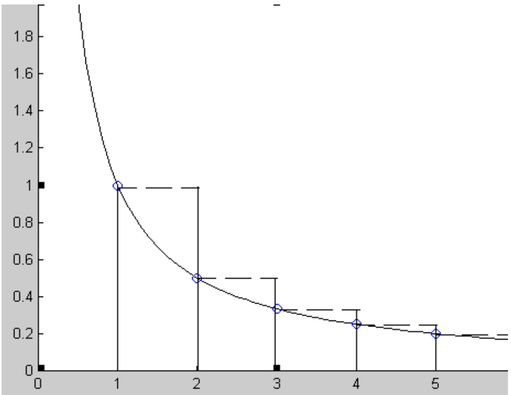
$$\int_1^\infty f(x)\,dx \geq a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_1^\infty f(x)\,dx + a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_1^\infty f(x)\,dx + a_1 \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq 0$$

Men etter forutsetningene skal $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergere. Da må også $\int_1^\infty f(x)\,dx + a_1$ eksistere.

Siden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ligger mellom denne verdien og 0, må $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eksistere slik at rekka konvergerer.



Så bruker vi figuren til høyre til å vise at

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer } \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerer.}$$

Av figuren ser du at

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \geq \int_1^\infty f(x)\,dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \int_1^\infty f(x)\,dx \geq 0$$

Siden rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ etter forutsetningene konvergerer, må integralet eksistere.

Siste del av setningen kan bevises på tilsvarende måte. Men det er enklere å ta negasjonene av de to bevisene vi allerede har gjennomført. Hvis vi tar negasjonen av implikasjonen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer } \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerer}$$

får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergerer } \Leftarrow \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ divergerer.}$$

Og tar vi negasjonen av implikasjonen

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerer } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer.}$$

får vi

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ divergerer } \Leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergerer.}$$

Til sammen har vi nå bevist hele setningen.

Vi skal nå bruke dette kriteriet til å undersøke konvergensen til to spesielle rekker. Resultatene er viktige, og vil bli mye brukt senere.

Eksempel 3.5: Den *harmoniske rekka* er gitt ved

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Undersøk om denne rekka konvergerer.

Løsning: Vi merker oss først at leddene i rekka bli stadig mindre og konvergerer mot 0. For å kunne bruke integralkriteriet, danner vi funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

som er kontinuerlig og avtakende når $x \geq 1$. Videre er

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \underline{\lim_{x\to\infty} \ln x}.$$

Men denne grensen eksisterer ikke. Altså divergerer $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$. Da må også

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

divergere.

***Eksempel 3.6*:** Undersøk om rekka

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

konvergerer.

Løsning: Vi merker oss først at leddene i rekka blir stadig mindre og konvergerer mot 0. For å kunne bruke integralkriteriet, danner vi funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

som er kontinuerlig og avtakende når $x \geq 1$. Videre er

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - (-1) = -0 + 1 = \underline{1}.$$

Altså konvergerer $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$. Da må også

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

konvergere (men vi vet ikke hva rekka konvergerer mot).

Begge disse eksemplene er spesialtilfeller av setningen nedenfor. Du finner beviset i et vedlegg.

Rekka $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$ kalles *p-rekka*.

Denne rekka konvergerer dersom $p > 1$, og divergerer dersom $p \leq 1$.

Oppgave 3.5.

3.3.3. Sammenlikningskriteriet og grensesammenlikningskriteriet.

Det er ofte mulig å undersøke om ei rekke konvergerer ved å sammenlikne rekka med ei rekke som du kjenner konvergensegenskapene til. Da benytter du denne setningen, som kalles ***sammenlikningskriteriet***:

La $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ være to tallfølger, der $a_n \geq b_n \geq 0$ for alle $n \geq 1$.
Da gjelder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerer } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergerer.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergerer.}$$

Setningen er egentlig innlysende. Den første implikasjonen sier jo at dersom rekka med de største leddene konvergerer, må også rekka med de minste leddene konvergere. Og den siste implikasjonen sier at dersom leddene med de minste leddene divergerer, må også rekka med de største leddene divergere.

Vi spanderer likevel på oss et formelt bevis av den første setningen. Den andre setningen er bare negasjonen av den første.

La S_n være den *n*'te partialsummen til $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, d.v.s. at $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Siden $b_k \geq 0$ er tallfølgen $\{S_n\}$ monotont voksende. Men $\{S_n\}$ er også begrenset fordi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Den første ulikheten følger av at $b_k \leq a_k$ for alle $k \geq 1$, og de siste ulikheten følger av at tallfølgen $\sum_{k=1}^{n} a_k$ er voksende fordi $a_k \geq 0$. Men siden rekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer, må S_n være begrenset. Og vi vet at en tallfølge som er monotont voksende og begrenset må konvergere.

Altså konvergerer rekka $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Når vi bruker dette kriteriet, sammenlikner vi ofte med ei passende *p*-rekke. Dersom både teller og nevner er polynomer, lar vi *p* være lik forskjellen i grad mellom nevner- og teller-polynomene. Eksemplene nedenfor viser teknikken:

***Eksempel 3.7*:** Undersøk om rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$$

konvergerer eller divergerer.

Løsning: Vi ser at nevneren er et førstegradspolynom i *k*, mens telleren er konstant. Det er derfor nærliggende å sammenlikne med ei *p*-rekke av samme type, d.v.s. *p*-rekka $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Denne rekka divergerer, og det er derfor nærliggende å gjette på at også rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ divergerer. Vi må da påvise at leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ er større enn tilsvarende ledd i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Men dersom vi skriver ut noen ledd i hver av rekkene, ser vi at det ikke er tilfelle:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

Men dersom vi multipliserer *p*-rekka med $\frac{1}{2}$, vil *p*-rekka fremdeles divergere. Da blir

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Leddene i denne rekka ser ut til å være mindre enn de tilsvarende leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$.

Men vi må vise at det gjelder generelt. Det gjøres slik:

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{2k-(2k-1)}{(2k-1)\cdot 2k}=\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}>0 \text{ når } k\geq 1$$

slik at $\frac{1}{2k-1}>\frac{1}{2k}$ for alle $k\geq 1$. Og da må $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}$ divergere fordi $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ divergerer.

Eksempel 3.8: Undersøk om rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}$$

konvergerer eller divergerer.

Løsning: Vi ser at nevneren er et andregradspolynom i *k* mens telleren er en konstant. Da er det nærliggende å sammenlikne med rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

som vi vet konvergerer. Vi skriver ut noen av de første leddene i hver av rekkene, og får

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{21}+\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots$$

Vi ser at de tre første leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}$ er mindre enn de tilsvarende leddene i rekka $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Men vi må vise at det gjelder generelt:

$$\frac{1}{k(2k+1)}-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-k(2k+1)}{k(2k+1)\cdot k^2}=\frac{k^2-2k^2-k}{k^3(2k+1)}=\frac{-k^2-k}{k^3(2k+1)}=\frac{-k-1}{k^2(2k+1)}<0 \text{ når } k\geq 1$$

slik at $\frac{1}{k(2k+1)} < \frac{1}{k^2}$ for alle $k \geq 1$. Og da må $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)}$ konvergere fordi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerer.

Eksemplene over viser at det kan være plundrete både å finne rett rekke å sammenlikne med, og å vise at leddene i den ene rekka er større enn leddene i den andre rekka. Vi skal derfor utvikle sammenlikningskriteriet til en annen form som ofte kan være gunstigere i bruk, og som også er mer generell enn sammenlikningskriteriet. Denne nye formen kalles ***grense-sammenlikningskriteriet***:

La $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ og $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ være to rekker som begge har bare positive ledd.
Dersom

$$L = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$$

eksisterer og er forskjellig fra 0, så vil enten begge rekkene konvergere, eller begge rekkene vil divergere.

Bevis: Dersom betingelsene i setningen er oppfylt, vil det alltid være mulig å finne to positive tall *m* og *M* slik at når *k* er stor nok (større enn k_0), er

$$0 < m < \frac{a_k}{b_k} < M \quad \Leftrightarrow \quad 0 < m \cdot b_k < a_k < M \cdot b_k \text{ når } k > k_0 \,.$$

Anta først at $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergerer. Siden $m \cdot b_k < a_k$, får vi at

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} m \cdot b_k < \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k < \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k < \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$

Men siden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer, må også $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergere.

Anta så at $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer. Siden $a_k < M \cdot b_k$, får vi at

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k < \sum_{k=k_0}^{\infty} M \cdot b_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k < M \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k > \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$

Men siden $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerer, må også $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergere.

Resten av setningen følger ved å invertere disse to implikasjonene.

I Eksempel 3.7. og 3.8 så vi at det kan være plundrete å bruke sammenlikningskriteriet. Vi skal nå se på de samme rekkene på nytt, men nå med grensesammenlikningskriteriet.

***Eksempel 3.9*:** Undersøk konvergensen til de to rekkene:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k+1)}$

Løsning:

a) Siden telleren er konstant mens nevneren er et førstegradspolynom i *k*, er det naturlig å sammenlikne med $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ som vi vet divergerer:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{2k-1}}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{(2k-1)k}{(2k-1)k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k-1} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{k}} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Grenseverdien eksisterer og er forskjellig fra null. Altså må $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ divergere fordi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerer.

b) Siden telleren er konstant mens nevneren er et andregradspolynom i *k*, er det naturlig å sammenlikne med $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ som vi vet konvergerer:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k(2k+1)}}{\frac{1}{k^2}} \cdot \frac{k^2(2k+1)}{k^2(2k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+1} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{k}} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

Grenseverdien eksisterer og er forskjellig fra null. Altså må $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ konvergere fordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer.

Oppgave 3.6.

3.3.4. Alternerende rekker.

Vi kommer ofte bort i rekker der annethvert ledd er positivt og annethvert ledd er negativt. Slike rekker kalles ***alternerende***, og defineres formelt slik:

Ei rekke der leddene er vekselvis positive og negative, kalles ***alternerende***.

Slike rekker kan skrives på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{eller} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \quad \text{der} \quad a_k > 0,$$

avhengig av om første ledd er negativt eller positivt.

Merk at definisjonen er slik at a_k alltid er positiv. Det alternerende fortegnet ligger i faktoren $(-1)^k$ eller $(-1)^{k+1}$

Eksempel 3.10: Rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

kalles *den alternerende harmoniske rekka*.

Vi har et ganske enkelt konvergenskriterium for alternerende rekker:

> Dersom leddene i ei alternerende rekke er slik at $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ og $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, så vil rekka konvergere.

Beviset er ganske morsomt. Vi skal først anta at første ledd er positivt, og skal se på partialsummen av et jamt antall ledd:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

der *n* er et jamt tall. Denne summen kan vi splitte opp med parenteser på to måter:

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \qquad (1)$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n \qquad (2)$$

Men siden $a_{k-1} \geq a_k \geq 0$, er alle differansene inni parentesene positive. Da viser (1) at S_n er ledd i en monotont voksende tallfølge. Men (2) viser at denne tallfølgen er opptil begrenset. Altså er $\{S_n\}$ en konvergent tallfølge, og rekka $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ konvergerer.

Dersom *n* er et oddetall, kan vi føre et tilsvarende resonnement der vi viser at S_n er ledd i en tallfølge som er monotont avtakende og nedtil begrenset. Også da må rekka $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ konvergere.

Eksempel 3.11*:* Vis at den alternerende harmoniske rekka konvergerer.

Løsning: Den alternerende harmoniske rekka er

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

d.v.s. at $a_k = \frac{1}{k}$. Vi må nå vise at kravene for konvergens er oppfylt.

Vi ser direkte at

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0.$$

Videre er

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k+1)}{k(k+1)} = \frac{-1}{k(k+1)} < 0 \quad \text{for alle } k \geq 1$$

slik at

$$a_{k+1} < a_k \quad \text{for alle } k \geq 1 .$$

Og da er begge kravene for konvergens oppfylt.

Oppgave 3.7.

I praktisk arbeid kan det være vanskelig å finne summen av ei konvergent rekke, d.v.s. finne hva den uendelige rekka konvergerer mot. Vi kan da være fristet til å summere bare de *n* første leddene, og håpe at feilen vi gjør ikke er for stor. For alternerende rekker har vi en enkel test på hvor stor feilen da blir:

Feilen er mindre enn absoluttverdien av det første leddet som vi kutter ut.

Dette formulerer vi som en setning:

La S være summen av en konvergent alternerende rekke.
La S_n være den n'te partialsummen til rekka.
Da er

$$|S - S_n| < a_{n+1} .$$

Setningen kan bevises med et tilsvarende resonnement som beviset for konvergens.

Eksempel 3.12: Finn et tilnærmet uttrykk for summen av rekka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

med usikkerhet på mindre enn 0.01.

Løsning: Vi ser at dette er en alternerende rekke som tilfredsstiller kravene for konvergens. At usikkerheten skal være mindre enn 0.01, betyr at første ledd som kuttes ut må være slik at

$$\frac{1}{k^2} \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 \geq 100 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 10 .$$

Vi summerer derfor de 9 første leddene, og får

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{9} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} + \frac{1}{64} - \frac{1}{81} \approx \underline{\underline{-0.83}} .$$

Oppgave 3.8.

I mer videregående studier av rekker har vi bruk for begrepene **absolutt konvergens** og **betinget konvergens**. Disse begrepene defineres slik:

Ei rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer ***absolutt*** dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Ei rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer ***betinget*** dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, mens $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer.

Vi kan blant annet vise at:

Dersom ei rekke konvergerer absolutt, vil den også konvergere.

Eksempel 3.13: Undersøk om rekkene

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (den alternerende harmoniske rekka)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

konvergerer betinget eller absolutt.

Løsning: Vi vet at begge rekkene konvergerer. Vi må nå undersøke om de rekkene som framkommer når vi summerer absoluttverdiene av leddene, også konvergerer:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, som er den harmoniske rekka. Vi vet at den divergerer. Altså vil $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergere betinget.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ som vi vet konvergerer fordi det er en *p*-rekke med $p = 2$. Da må $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ konvergere absolutt.

Absolutt konvergente rekker har noen gunstige egenskaper som betinget konvergente rekker ikke har. Vi kan bl.a. stokke om rekkefølgen på leddene i en *absolutt* konvergent rekke uten at summen av rekka endres. Men dersom vi stokker om leddene i en *betinget* konvergent rekke, kan vi risikere at summen endres.

Som eksempel kan vi få summen av leddene i den alternerende harmoniske rekka til å bli hva som helst ved å summere i en bestemt rekkefølge. Vi kan for eksempel få summen til å konvergere mot 20 ved at vi først summerer bare positive ledd inntil summen er blitt større enn 20. Dette kan vi klare fordi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerer. Deretter legger vi til negative ledd til summen er under 20. Så legger vi til positive ledd til summen er over 20, og slik fortsetter vi. På den måten vil summen konvergere mot 20.

Moralen er at vi må være svært forsiktig med å manipulere med rekkefølgen av ledd i en betinget konvergent rekke. Men dersom rekka konvergerer absolutt, trenger vi ikke å være like forsiktige. Det skal vi dra nytte av etter hvert.

3.3.5. Forholdskriteriet.

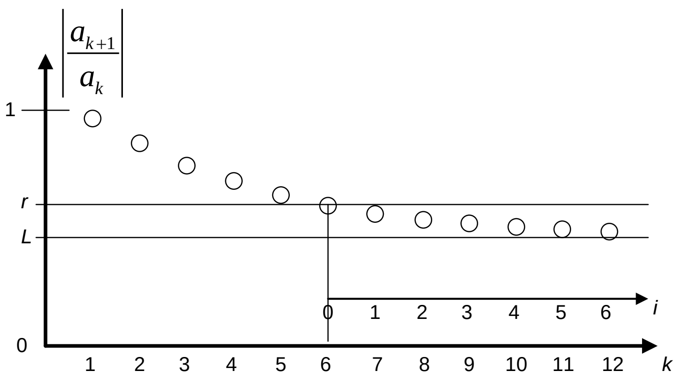
Når du bruker sammenliknings- eller grensesammenlikningskriteriet, sammenlikner du ledd i en rekke med ledd i en annen rekke. ***Forholdskriteriet*** som vi nå skal se på, sammenlikner to ledd som følger etter hverandre i *samme* rekke. Vi trenger altså ikke å benytte kunnskaper om andre rekker.

La $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ være ei rekke der alle leddene er forskjellig fra null.
Beregn forholdet

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Dersom $L<1$, konvergerer rekka absolutt.
Dersom $L>1$ eller L ikke eksisterer, divergerer rekka.
Dersom $L=1$, gir ikke dette kriteriet noen avgjørelse.

Bevis:



Anta først at $0 < L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$.

Da må det eksistere et tall r der $L<r<1$ og et helt tall N slik at

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le r \text{ når } k>N.$$

Se figuren til venstre der $N=6$.
Vi ser nå på leddene for $k>N$.

Da kan vi sette opp:

$$|a_{N+1}| \le r\cdot|a_N|$$

$$|a_{N+2}| \le r\cdot|a_{N+1}| = r\cdot r\cdot|a_N| = r^2\cdot|a_N|$$

$$|a_{N+3}| \le r\cdot|a_{N+2}| = r\cdot r^2\cdot|a_N| = r^3\cdot|a_N|$$

Generelt blir:

$$|a_{N+k}| \le r^k\cdot|a_N|.$$

Da blir

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{N}|a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|.$$

Her vil $\sum_{k=1}^{N} |a_k|$ inneholde et endelig antall ledd. Denne summen er derfor uten interesse når vi undersøker konvergens. La oss heller se på $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|$, og innføre en ny summasjonsindeks

$$i = k - N \quad \Leftrightarrow \quad k = N + i\,.$$

Da får vi:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{N+i}| \le \sum_{i=1}^{\infty} r^i \cdot |a_N| = |a_N| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} r^i\,.$$

Men $\sum_{i=1}^{\infty} r^i$ er ei geometrisk rekke med kvotient *r*. Denne rekka må konvergere siden vi har forutsatt at $0 < r < 1$. Og da må $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ også konvergere, slik at $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergerer.

Altså konvergerer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutt.

Dersom $L > 1$, må det eksistere en *N* slik at

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |a_{k+1}| > |a_k| \text{ når } k \ge N\,.$$

Da er tallfølgen $\{|a_n|\}$ voksende. Og en voksende følge av positive ledd kan umulig konvergere mot null. Altså divergerer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Eksempel 3.14: Undersøk konvergensen for rekkene

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$

Løsning:

a) $$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} \cdot \frac{3^{k+1}}{3^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{3k} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

Da konvergerer rekka absolutt.

b) $$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}}{\frac{k!}{2^k}} \cdot \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{2k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k! \cdot (k+1)}{2k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2}\,.$$

Men denne grenseverdien eksisterer ikke. Da divergerer rekka.

Oppgave 3.9.

Forholdskriteriet er svært viktig når vi skal gå løs på *potensrekker*.