1. Innledning.

1.1. Tallfølger.

En ***tallfølge*** er rett og slett en følge av tall (eller matematiske uttrykk). Vi kan skrive en tallfølge slik:

$$a_0,\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n,\, \cdots$$

eller kortere

$$\{a_n\},\; n = 0, 1, 2, \cdots$$

Ovenfor er det første leddet kalt a_0. Ofte lar vi a_1 være det første leddet. Merk at a_n symboliserer ledd nr n i tallfølgen (eller ledd nr $n+1$ dersom første ledd er a_0), mens $\{a_n\}$ symboliserer *hele* tallfølgen.

Dersom tallfølgen har uendelig mange ledd, har vi en *uendelig* tallfølge.

En tallfølge kan gis på to måter:

- **Eksplisitt:** Vi oppgir da en formel for a_n.

Eksempel 1.1: Sett opp de 5 første tallene i tallfølgen gitt ved

$$a_n = \frac{n}{n+1},\; n = 0, 1, 2, \cdots$$

Løsning: Innsetting av $n = 0, 1, 2, \cdots$ gir tallfølgen

$$a_0 = \tfrac{0}{0+1} = 0, \qquad a_1 = \tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}, \qquad a_2 = \tfrac{2}{2+1} = \tfrac{2}{3}, \qquad a_3 = \tfrac{3}{3+1} = \tfrac{3}{4}, \qquad a_4 = \tfrac{4}{4+1} = \tfrac{4}{5}.$$

Oppgave 1.1.

- **Rekursivt:** Vi oppgir da ett (eller flere) startledd, samt en sammenheng mellom etterfølgende ledd i tallfølgen.

Eksempel 1.2: *Fibonacci-tallene* er definert ved at de to første tallene er lik 1, og alle de andre tallene er lik summen av de to foregående. Matematisk formulert:

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1},\; n = 2, 3, 4, \cdots$$

Sett opp de 8 første tallene i denne tallfølgen.

Løsning: De 8 første tallene blir

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_2 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2, \qquad a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5, \qquad a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8, \qquad a_6 = a_4 + a_5 = 5 + 8 = 13,$$

$$a_7 = a_5 + a_6 = 8 + 13 = 21.$$

Oppgave 1.2.

Hittil har vi kun snakket om *tallfølger*. Vi kan nå gå videre etter to spor:

1. I mange praktiske situasjoner er tallfølgene gitt på rekursiv form, slik som med Fibonacci-tallene i eksemplet ovenfor. Sammenhengen mellom leddene kalles gjerne en ***rekursiv likning*** eller en ***differenslikning***. Noen ganger er vi i stand til å gå over fra den rekursive formen til en eksplisitt formel for a_n. Vi sier da at vi *løser differens-likningen*. Teknikker for løsing av noen typer differenslikninger er beskrevet i disse notatene:
   - Lineære første ordens differenslikninger.
   - Lineære andre ordens differenslikninger.
   - System av lineære første ordens differenslikninger.

2. Vi kan summere ledd i en tallfølge. Da får vi ei ***rekke***. Vi har mange forskjellige typer rekker som spiller en overraskende stor rolle i matematikken, og som har mange praktiske anvendelser. Vi skal gå gjennom stoffet i denne rekkefølgen:
   - Før vi for alvor går i gang med rekker, må du skaffe deg mer kunnskap om generelle egenskaper ved tallfølger.
   - Deretter skal vi se på generelle egenskaper ved rekker.
   - Vi skal også få et lite gjensyn med to typer rekker som du forhåpentlig kjenner fra før: *aritmetiske rekker* og *geometriske rekker*.
   - Et av de vanskeligste problemområdene ved uendelige rekker er å avgjøre om rekkene *konvergerer* eller ikke, d.v.s. om summen av uendelig mange ledd går mot en fast grense. Vi skal derfor lære oss noen *konvergenskriterier*.
   - Nå kommer vi endelig til et av hovedpoengene: vi skal se på *potensrekker* og spesielt på *Taylor-rekker*.
   - Til slutt skal vi ta for oss en spesiell type rekker som kalles *Fourier-rekker*.