Geometriske tallfølger og rekker.

1. Generelle egenskaper.

Vi starter med ***geometriske tallfølger***, som karakteriseres ved at forholdet mellom to etterfølgende ledd i tallfølgen er konstant. Dette formuleres rekursivt slik:

En tallfølge $\{a_n\}$ er en ***geometrisk tallfølge***

$\Updownarrow$ def.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = k \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = k \cdot a_n$$

Størrelsen k kalles *tallfølgens kvotient*.

Hvis vi kaller første ledd i tallfølgen for a_0, kan vi sette opp:

$$a_1 = k \cdot a_0$$
$$a_2 = k \cdot a_1 = k \cdot (k \cdot a_0) = k^2 \cdot a_0$$
$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot (k^2 \cdot a_0) = k^3 \cdot a_0$$

Slik kan vi fortsette, og får generelt

$$\underline{a_n = k^n \cdot a_0}\,.$$

Vi ser at hvis $-1 < k < 1$ vil den geometriske tallfølgen konvergere mot 0.

Hvis m og n er to hele tall, blir

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{k^n \cdot a_0}{k^m \cdot a_0} = k^{n-m} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n = k^{n-m} \cdot a_m}\,.$$

Setter vi $m = 1$, får vi

$$\underline{a_n = k^{n-1} \cdot a_1}$$

som er den sammenhengen som vanligvis finnes i formelsamlinger.

Vi får en ***geometrisk rekke*** når vi summerer ledd i en geometrisk tallfølge. Vi skal nå finne en formel for den n'te partialsummen S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} \cdot a_1\,.$$

Vi multipliserer dette uttrykket med k:

$$k \cdot S_n = k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \cdots + k^n \cdot a_1\,.$$

Vi trekker nå disse to uttrykkene fra hverandre. Da står vi kun igjen med

$$\begin{aligned} k \cdot S_n - S_n &= \left(k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \cdots + k^n \cdot a_1\right) - \left(a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \cdots + k^{n-1} \cdot a_1\right) \\ &= k^n \cdot a_1 - a_1 = a_1\left(k^n - 1\right) \end{aligned}.$$

Da blir

$$(k-1)S_n = (k^n - 1)a_1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}}}\,.$$

Vi ser at dersom $-1 < k < 1$, blir $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$. Da vil den geometriske rekka konvergerer mot

$$S = a_1 \frac{0-1}{k-1} = \underline{\underline{\frac{a_1}{1-k}}} \quad \text{dersom } -1 < k < 1.$$

Eksempel 1: I ei geometrisk rekke er tredje ledd lik 24 mens femte ledd er lik $\frac{32}{3}$. Vis at rekka konvergerer, og finn summen som den uendelige rekka konvergerer mot.

Løsning: Vi har at

$$a_5 = k^{5-3} a_3 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{32}{3} = k^2 \cdot 24 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = \tfrac{32}{24\cdot 3} = \tfrac{4}{9} \quad \Leftrightarrow \quad k = \underline{\pm\tfrac{2}{3}}.$$

Vi ser at $-1 < k < 1$ slik at rekka konvergerer for begge verdiene av *k*.
Finner a_1 ved å benytte at

$$a_3 = k^{3-1} a_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{a_3}{k^2} = \frac{24}{\left(\pm\frac{2}{3}\right)^2} = \underline{54}.$$

Vi får nå to løsninger:
Dersom $k = +\frac{2}{3}$, blir

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{54}{1-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{162}}.$$

Dersom $k = -\frac{2}{3}$, blir

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{54}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \underline{\underline{\frac{162}{5}}}.$$

Eksempel 2: Ei geometrisk rekke er gitt ved at første ledd er $a_1 = x$ og kvotienten er $k = -2x$.

a) Skriv ut de første leddene i rekka.
b) Sett opp en formel for det *n*'te leddet i rekka.
c) For hvilke verdier av *x* konvergerer rekka?
d) Finn summen av rekka når den konvergerer.

Løsning:

a) De første leddene i rekka blir

$$x,\ -2x^2,\ 4x^3,\ -8x^4,\ \cdots.$$

b) $$a_n = k^{n-1}\cdot a_1 = (-2x)^{n-1}\cdot x = \underline{\underline{(-2)^{n-1} x^n}}$$

(som kan omformes til mange andre former).

c) Rekka konvergerer når

$$-1 < k < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < -2x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{-1}{-2} > x > \tfrac{1}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{-\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}}}.$$

d) Når rekka konvergerer, er summen

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x}{1-(-2x)} = \underline{\underline{\frac{x}{1+2x}}}$$

Geometriske rekker dukker opp i mange sammenhenger. De danner for eksempel grunnlaget for beregning av [annuitetslån].