## *Aritmetiske tallfølger og rekker.*

Vi starter med ***aritmetiske tallfølger***, som karakteriseres ved at differensen mellom to etterfølgende ledd i tallfølgen er konstant. Dette formuleres rekursivt slik:

En tallfølge $\{a_n\}$ er en ***aritmetisk tallfølge***

$\Updownarrow$ def.

$$a_{n+1} = a_n + d\ .$$

Størrelsen $d$ kalles *tallfølgens differens*.

Hvis vi kaller første ledd i tallfølgen for $a_0$, kan vi sette opp:

$$a_1 = a_0 + d$$
$$a_2 = a_1 + d = (a_0 + d) + d = a_0 + 2d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_0 + 2d) + d = a_0 + 3d$$

Slik kan vi fortsette, og får generelt

$$\underline{a_n = a_0 + n \cdot d}\ .$$

Vi ser at hvis $d \neq 0$ vil den aritmetiske tallfølgen divergere fordi leddene aldri kan gå mot noen fast verdi.

Hvis $m$ og $n$ er to hele tall, blir

$$a_n - a_m = (a_0 + n \cdot d) - (a_0 + m \cdot d) = \underline{(n-m)d}\ .$$

Setter vi $m = 1$, får vi

$$a_n - a_1 = (n-1)d \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

som er den sammenhengen som vanligvis finnes i formelsamlinger.

Vi får en ***aritmetisk rekke*** når vi summerer ledd i en aritmetisk tallfølge. Siden aritmetiske tallfølger divergerer, vil også de aritmetiske rekkene divergere.

Vi skal nå finne en formel for den $n$'te partialsummen $S_n$, og lar første ledd være $a_1$.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d).$$

Men vi kan også starte summeringen bakfra i rekka:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d).$$

Vi summerer nå disse to uttrykkene for $S_n$. Da får vi:

$$\begin{aligned} 2S_n &= \big(a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d)\big) \\ &\quad + \big(a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d)\big) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots (a_1 + a_n) = n \cdot (a_1 + a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{S_n = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n)}} \end{aligned}$$

***Eksempel 1:*** I en aritmetisk tallfølge er sjuende ledd lik 12 mens femtende ledd er lik 32. Finn ledd nr. 25.

*Løsning:* Vi finner først $d$ ved å benytte at

$$a_n - a_m = (n-m)d \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{a_n - a_m}{n-m} = \frac{32-12}{15-7} = \frac{20}{8} = \underline{\frac{5}{2}}.$$

Da blir

$$a_{25} - a_{15} = (25-15)d \quad \Leftrightarrow \quad a_{25} = a_{15} + 10d = 32 + 10 \cdot \tfrac{5}{2} = \underline{\underline{57}}.$$

***Eksempel 2:*** I en aritmetisk rekke vet du at summen av de 8 første leddene er lik 20, mens summen av de 12 første leddene er lik 48. Hva er summen av de 20 første leddene i denne rekka?

*Løsning:* Det lureste er kanskje å sette inn uttrykket for $a_n$ i formelen for $S_n$. Da får vi:

$$S_8 = \tfrac{8}{2}(a_1 + a_8) = 4\big(a_1 + (a_1 + (8-1)d)\big) \quad \Leftrightarrow \quad 20 = 8a_1 + 28d \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 2a_1 + 7d$$

mens

$$S_{12} = \tfrac{12}{2}(a_1 + a_{12}) = 6\big(a_1 + (a_1 + (12-1)d)\big) \quad \Leftrightarrow \quad 48 = 12a_1 + 66d \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 2a_1 + 11d$$

Dette er to likninger med $a_1$ og $d$ som ukjente. Trekker likningene fra hverandre, og får

$$3 = 4d \quad \Leftrightarrow \quad d = \tfrac{3}{4}.$$

Da blir

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(5 - 7d) = \tfrac{1}{2}\left(5 - 7 \cdot \tfrac{3}{4}\right) = -\tfrac{1}{8}.$$

Nå blir

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = -\tfrac{1}{8} + 19 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{113}{8}$$

slik at

$$S_{20} = \tfrac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10\left(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{113}{8}\right) = \underline{\underline{140}}.$$