1. Potensregning.

1.1. Grunnleggende definisjoner og regneregler.

Vi har ofte bruk for å gange et tall a med seg selv n ganger. Dette skriver vi som a^n, der a kalles *grunntallet* og n kalles *eksponenten.* Vi har altså denne definisjonen:

Dersom n er et helt, positivt tall, er

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$$

Med utgangspunkt i denne definisjonen har vi disse regnereglene:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} = \left(a^m\right)^n$

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

For å vise at Regel 1 stemmer, kan vi først se på et eksempel:

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^5 .$$

Generelt vises regelen slik:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ faktorer}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ faktorer}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ faktorer}} = a^{m+n}$$

På tilsvarende måte vises Regel 2. Først et eksempel:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a \cdot a}}{\cancel{a \cdot a}} = \frac{a \cdot a \cdot a}{1} = a^3 .$$

Generelt får vi (når $m > n$):

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{m \text{ faktorer}}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ faktorer}}} = \frac{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{m-n \text{ faktorer}}}{1} = a^{m-n} .$$

I den midterste overgangen forkortes n faktorer bort, slik at vi står igjen med $m-n$ faktorer i teller.

Til slutt skal vi se på regel 3 som sier at

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} = \left(a^m\right)^n .$$

La oss som før starte med et eksempel:

$$\left(a^2\right)^3 = \left(a^2\right)\cdot\left(a^2\right)\cdot\left(a^2\right) = (a\cdot a)\cdot(a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = a^6 .$$

$$\left(a^3\right)^2 = \left(a^3\right)\cdot\left(a^3\right) = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a^6 .$$

Generelt får vi:

$$\left(a^n\right)^m = \underbrace{\Bigg(\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ faktorer}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ faktorer}}\Bigg)\cdot \ldots \cdot\Bigg(\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ faktorer}}\Bigg)}_{\text{Gjentas } m \text{ ganger}} = \Bigg(\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{m\cdot n\text{ faktorer}}\Bigg) = a^{m\cdot n} .$$

Tilsvarende får vi for $\left(a^m\right)^n$.

Regel 3 kan brukes til å foreta smarte omforminger. Her er et par eksempler på dette:

$$a^{12} = \left(a^6\right)^2 = \left(a^4\right)^3 = \left(a^3\right)^4 = \left(a^2\right)^6 .$$

$$8^x = \left(2^3\right)^x = 2^{3x} = \left(2^x\right)^3 .$$

Slike omforminger kan ofte være nyttige. Det er ikke alltid lett å se hvilken form som er mest gunstig, så vi må ofte prøve oss fram for å finne den gunstigste formen.

Regel 4 og 5 kan du prøve å bevise selv etter samme framgangsmåte som ovenfor.

Vær obs på denne situasjonen:

$4\cdot 3^2$ betyr at vi først skal regne ut 3^2, og deretter multiplisere med 4. Vi får altså:
$4\cdot 3^2 = 4\cdot 9 = \underline{\underline{36}}$.

Det er en alt for vanlig feil å gange sammen $4\cdot 3$ først, og deretter opphøye i 2. Da får du det feilaktige resultatet $12^2 = 144$. Dersom du skal gange sammen $4\cdot 3$ først, og deretter opphøye i 2, må du skrive $(4\cdot 3)^2$. Vær nøye med parentesene!

Vi avslutter med et større eksempel:

Eksempel 1.1: Skriv uttrykket

$$\frac{(2x)^3\cdot\left(x^2\right)^4}{4x^5}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

så enkelt som mulig.

Løsning: Vi omformer uttrykket slik ved hjelp av regnereglene ovenfor:

$$\frac{(2x)^3\cdot\left(x^2\right)^4}{4x^5}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2^3\cdot x^3\cdot x^{2\cdot 4}}{4x^5}\cdot\frac{x^2}{2^2} = \frac{2^3\cdot x^3\cdot x^8\cdot x^2}{4\cdot 2^2\cdot x^5} = \frac{8}{16}\cdot\frac{x^{3+8+2}}{x^5}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{13}}{x^5} = \frac{1}{2}\cdot x^{13-5} = \frac{1}{2}x^8 = \underline{\underline{\frac{x^8}{2}}}$$

Oppgave 1.1.

1.2. Negative eksponenter.

Hittil har det vært underforstått at eksponentene er hele, positive tall. Men vi har bruk for potensregning også for andre eksponenter. Vi definerer derfor:

$a^0 = 1$ når $a \neq 0$. $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Den første definisjonen begrunnes slik:

Når vi forkorter på vanlig måte, er $\dfrac{a^n}{a^n} = 1$.

Men når vi bruker regel 2, blir $\dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$.

Siden det er hensiktsmessig å få samme resultat uansett regnemåte, er det naturlig å definere $a^0 = 1$.

For å begrunne den andre definisjonen, kan vi først se på et eksempel:

Når vi forkorter på vanlig måte, blir $\dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{\cancel{a \cdot a}}{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a \cdot a}} = \dfrac{1}{a \cdot a \cdot a} = \dfrac{1}{a^3}$.

Men når vi bruker regel 2, blir $\dfrac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$.

Siden det er hensiktsmessig å få samme resultat uansett regnemåte, er det naturlig å definere $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$, eller generelt $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Med utgangspunkt i den siste av disse nye reglene kan Eksempel 1 ovenfor løses litt enklere etter disse retningslinjene:

1. Samle alle faktorer med samme grunntall.
2. Faktorer som flyttes fra nevner til teller (eller omvendt) skifter fortegn på eksponenten.
3. Legg sammen eksponentene for hvert grunntall.

Eksempel 1.2: Bruk bl.a. retningslinjene i ramma ovenfor til å forenkle uttrykket

$$\frac{(2x)^3 \cdot (x^2)^4}{4x^5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

(samme som Eksempel 1.1).

Løsning:

$$\frac{(2x)^3 \cdot (x^2)^4}{4x^5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2^3 \cdot x^3 \cdot x^{2\cdot 4}}{2^2\, x^5} \cdot \frac{x^2}{2^2} = 2^{3-2-2} \cdot x^{3+8+2-5} = 2^{-1} \cdot x^8 = \underline{\underline{\frac{x^8}{2}}}.$$

Oppgave [1.2](), [1.3]().

1.3. Rotregning.

Du vet sikkert at

$$\sqrt{25} = \pm 5 \ \text{ fordi } \ (\pm 5)^2 = 25$$

eller at

$$\sqrt{100} = \pm 10 \ \text{ fordi } \ (\pm 10)^2 = 100\,.$$

Generelt har vi derfor denne definisjonen av kvadratrota til et positivt tall:

$$\sqrt{a} = t \quad \Rightarrow \quad a = t^2$$

Nå trenger vi ikke å begrense oss til kvadratrøtter. Vi har også tredje rot:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \ \text{ fordi } \ 2^3 = 8\,,$$

eller

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \ \text{ fordi } \ (-5)^3 = -125\,.$$

Generelt har derfor at

$$\sqrt[3]{a} = t \quad \Rightarrow \quad a = t^3\,.$$

Vi merker oss at når det gjelder kvadratrøtter, kan vi kun trekke kvadratrota av positive tall. Resultatet er enten positivt eller negativt. Det skyldes at når vi kvadrerer et tall (positivt eller negativt), blir resultatet alltid positivt. Men når det gjelder tredje rot, kan vi godt trekke tredje rot av et negativt tall. Det skyldes at når et negativt tall opphøyes i tredje potens, blir resultatet negativt, mens et positivt tall som opphøyes i tredje potens alltid blir positivt.

Nå er vi klar til en generell definisjon av *n*-te rot av et tall:

$$\sqrt[n]{a} = t \quad \Rightarrow \quad a = t^n\,.$$

Vi kaller n for *roteksponenten*, mens a er *radikanden*.

Dersom n er et jamt tall, må a være positiv mens t kan være positiv eller negativ.
Dersom n er et oddetall, kan a være positiv eller negativ mens t har samme fortegn som a.

Legg merke til at:

- Dersom $n = 2$, har vi $\sqrt[2]{a}$ som vi skriver enklere som $\sqrt{a}$.
- Dersom n er et jamt tall, bruker vi vanligvis bare den positive verdien av rota dersom vi ikke sier noe annet.

Eksempel 1.3: Bestem (om mulig) disse rotuttrykkene:

$$\sqrt{81}\,, \qquad \sqrt[4]{81}\,, \qquad \sqrt[3]{-64}\,, \qquad \sqrt[5]{-32}\,, \qquad \sqrt[4]{-81}\,.$$

Løsning:

$$\sqrt{81} = 9 \ \text{ fordi } \ 9^2 = 81\,.$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \ \text{ fordi } \ 3^4 = 81\,.$$

$\sqrt[3]{-64} = -4$ fordi $(-4)^3 = -64$.

$\sqrt[5]{-32} = -2$ fordi $(-2)^5 = -32$.

$\sqrt[4]{-81}$ eksisterer ikke (mer presist: det fins ingen reelle løsninger) fordi det ikke eksisterer noe reelt tall som er slik at når det opphøyes i 4. potens, får du -81.

Oppgave 1.4.

På samme måte som for potensregning, har vi også noen regneregler for rotregning som det er kjekt å kunne:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

Eksempel 1.4: Skriv disse uttrykkene enklere:

$$\sqrt{9x^4}, \quad \sqrt[3]{8x^3}, \quad \sqrt{\frac{9}{25}}, \quad \sqrt{\frac{4x^2}{y^4}}, \quad \left(\sqrt{2}\right)^4.$$

Løsning:

$$\sqrt{9x^4} = \sqrt{9x^2 \cdot x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^2} = 3x \cdot x = \underline{\underline{3x^2}}.$$

$$\sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^3} = \underline{\underline{2x}}.$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}.$$

$$\sqrt{\frac{4x^2}{y^4}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2}}{\sqrt{y^4}} = \underline{\underline{\frac{2x}{y^2}}}.$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}.$$

Noen ganger klarer vi ikke å kvitte oss helt med rottegnene, men vi kan likevel omforme uttrykkene noe slik eksemplene nedenfor viser:

Eksempel 1.5: Skriv uttrykkene nedenfor med så enkle rotuttrykk som mulig:

$$\sqrt{9x^5}, \quad \sqrt[3]{2x^7}, \quad \sqrt{\frac{x^5}{2y^4}}.$$

Løsning:

$$\sqrt{9x^5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^4 \cdot x} = \underline{\underline{3x^2 \cdot \sqrt{x}}}.$$

$$\sqrt[3]{2x^7} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{2} \cdot x \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} = \underline{\underline{x^2 \cdot \sqrt[3]{2x}}}.$$

$$\sqrt{\frac{x^5}{2y^4}} = \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{2y^4}} = \frac{\sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot x}}{\sqrt{2 \cdot y^2 \cdot y^2}} = \frac{x \cdot x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{2} \cdot y \cdot y} = \underline{\underline{\frac{x^2}{y^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}}}.$$

Oppgave [1.5](#).

1.4. Fra rotregning til potensregning.

Det er faktisk en mye nærmere sammenheng mellom rotregning og potensregning enn vi har benyttet hittil. Vi har nemlig denne sammenhengen:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Begrunnelsen for denne sammenhengen er:

Vi vet at

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Men regnereglene for potensregning gir

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a.$$

Da er det fornuftig å definere

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Denne regelen kan komme til nytte når vi forenkler rotuttrykk. Men den kommer enda mer til nytte senere når vi skal derivere og integrere.

De tre første eksemplene nedenfor er hentet fra Eksempel 1.5, men nå er de løst med potens-regning. Det siste eksemplet er litt vanskeligere.

Eksempel 1.6: Skriv uttrykkene nedenfor med så enkle rotuttrykk som mulig:

$$\sqrt{9x^5}, \qquad \sqrt[3]{2x^7}, \qquad \sqrt{\frac{x^5}{2y^4}}, \qquad \frac{(2x)^{-2}}{\sqrt{y^3}} \cdot \sqrt{8xy}.$$

Løsning:

$$\sqrt{9x^5} = \left(3^2 \cdot x^5\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^5\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\cdot\frac{1}{2}} \cdot x^{5\cdot\frac{1}{2}} = 3^1 \cdot x^{2+\frac{1}{2}} = 3x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{3x^2 \cdot \sqrt{x}}}.$$

$$\sqrt[3]{2x^7} = \left(2x^7\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{7}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{2+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^2 \cdot (2x)^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{x^2 \cdot \sqrt[3]{2x}}}.$$

$$\sqrt{\frac{x^5}{2y^4}} = \left(\frac{x^5}{2y^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot y^{4\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{x^{2+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot y^2} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{x^2}{y^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{2}}}}.$$

$$\frac{(2x)^{-2}}{\sqrt{y^3}}\cdot\sqrt{8xy}=\frac{2^{-2}\cdot x^{-2}}{\left(y^3\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}=2^{-2+\frac{3}{2}}\cdot x^{-2+\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\cdot y^{-1}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x^{1+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{y^1}=\underline{\underline{\frac{1}{xy\cdot\sqrt{2x}}}}$$

I enkle oppgaver (som i de tre første eksemplene ovenfor) kan det virke mer tungvint å gå veien om potensregning enn å holde seg til rotregning. Men du skal ikke ha mye trening før du kan hoppe over mange av mellomleddene i eksemplene ovenfor. Og i mer kompliserte oppgaver (som i det siste eksemplet ovenfor) er det som regel mye mer hensiktsmessig å benytte potensregning konsekvent enn å holde seg til rotregning. Det vil du sikkert oppdage når du jobber med **Oppgave 1.6**.

1.5. Eksponentiallikninger.

Vi skal nå benytte våre kunnskaper til å løse en type likninger som kalles *eksponential-likninger*. Vanligvis må slike likninger løses med logaritmer (som er tema for neste hoved-avsnitt), men vi skal se på noen oppgaver som kan løses uten å bruke logaritmer.

Eksempel 1.7: Finn *x* av disse likningene:

a) $27^x=\frac{1}{9}$.

b) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

c) $8^{2x}-6\cdot 8^x+8=0$.

Løsning:

a) $27^x=\frac{1}{9}$.

Benytter først potensregning til å skrive begge sider av likhetstegnet som potensuttrykk med samme grunntall:

$$27^x=\tfrac{1}{9}\quad\Leftrightarrow\quad\left(3^3\right)^x=\frac{1}{3^2}\quad\Leftrightarrow\quad 3^{3x}=3^{-2}.$$

Nå må begge eksponentene være like:

$$3x=-2\quad\Leftrightarrow\quad\underline{\underline{x=-\tfrac{2}{3}}}.$$

b) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

For det første: $5\cdot 2^x$ er *ikke* lik 10^x!! Det er *kun* 2-tallet som skal opphøyes i *x*. Dersom også 5-tallet skulle vært opphøyd i *x*, måtte vi skrevet $(5\cdot 2)^x$.

Så til selve løsningen: Vi starter med å skrive

$$4^x=\left(2^2\right)^x=\left(2^x\right)^2.$$

Da kan likningen skrives

$$\left(2^x\right)^2-5\cdot 2^x+4=0$$

Dette er en andregradslikning med 2^x som ukjent. Vi bruker formel, og får:

$$2^x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}4\\1\end{cases}$$

Dette gir to løsninger:

$$2^x = 4 = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}},$$

og

$$2^x = 1 = 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}.$$

c) $\quad 8^{2x} - 6 \cdot 8^x + 8 = 0$.

Du faller vel aldri for fristelsen til å ”forkorte” bort et 8-tall, får jeg håpe?

Her nå vi omforme til en andregradslikning ved å benytte at $8^{2x} = \left(8^x\right)^2$. Da får vi

$$\left(8^x\right)^2 - 6 \cdot 8^x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8^x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \underline{4} \\ \underline{2} \end{cases}$$

Vi får altså to løsninger:

$$8^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^x = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}}.$$

$$8^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^3\right)^x = 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} = 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}}}.$$

Oppgave 1.7, 1.8.

1.6. Generell definisjon av potensuttrykk.

Vi skal nå forutsette at $a > 0$. Vi har definert a^t når *t* er et helt tall (positivt eller negativt), og vi har definert $a^{\frac{1}{n}}$ når *n* er et helt positivt tall. Vi vet at vi kan skrive

$$a^{\frac{t}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^t.$$

Dermed har vi har definert hva vi mener med a^x dersom *x* er et rasjonalt tall (d.v.s. et tall som kan skrives på formen $\frac{t}{n}$ der *t* er et helt tall mens *n* er et positivt heltall). Men hvordan skal vi oppfatte a^x dersom *x* er et irrasjonalt tall?

For ethvert irrasjonalt tall *x* er det mulig å konstruere en følge av *rasjonale* tall som nærmer seg mot *x*. Hvis vi tar det irrasjonale tallet π som eksempel, så vil tallfølgen

$$3, \quad \tfrac{31}{10}, \quad \tfrac{314}{100}, \quad \tfrac{3142}{1000}, \quad \tfrac{31416}{10000}, \ \ldots$$

være en slik tallfølge som kommer stadig nærmere mot π. Dersom vi ønsker å finne 4^π, kan vi da benytte en tallfølge

$$4^3, \ 4^{\frac{31}{10}} = \left(\sqrt[10]{4}\right)^{31}, \quad 4^{\frac{314}{100}} = \left(\sqrt[100]{4}\right)^{314}, \qquad 4^{\frac{3142}{1000}} = \left(\sqrt[1000]{4}\right)^{3142}, \ \ldots$$

Nå er det naturlig å definere 4^π som grenseverdien for $4^{\frac{t}{n}}$ der $\frac{t}{n}$ er den tallfølgen som er satt opp ovenfor. Selv om det i praksis er plundrete å beregne 4^π på denne måten, har vi i alle fall oppnådd å definere hva vi mener med a^x når *x* er et irrasjonalt tall.

Nå som du vet hva vi mener med uttrykket a^x når $a > 0$ og *x* er et hvilket som helst reelt tall, er du klar til å studere *eksponentialfunksjonen*. Men først bør du ta en tur innom *logaritmene*.