2. Logaritmer.

2.1. Grunnleggende definisjoner.

La oss gå tilbake til disse potensreglene:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\,, \qquad\qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\,.$$

Vi ser at istedenfor å multiplisere eller dividere to tall, kan vi nå legge sammen eksponentene eller trekke eksponentene fra hverandre. Addisjon og subtraksjon er jo mye enklere regne-operasjoner enn multiplikasjon og divisjon, særlig når du ikke har kalkulator til disposisjon. Denne observasjonen danner grunnlaget for *logaritmeregningen*.

Når vi driver logaritmeregning, snakker vi ikke lenger om *potenser*. Vi snakker heller om *logaritmer*. Mer presist har vi denne sammenhengen:

Dersom et tall $t = a^n$, sier vi at n er ***logaritmen til t med grunntall a***.
Dette skriver vi

$$n = \log_a(t)$$

eller enklere

$$n = \log_a t\,.$$

Dette innebærer at:

$$t = a^n \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_a(t)$$

Sammenhengen ovenfor fører til disse to identitetene:

$$t = a^{\log_a t}\,, \qquad\qquad n = \log_a(a^n)\,.$$

Eksempel 2.1: Finn disse logaritmene:

$$\log_2 8\,, \quad \log_5 25\,, \quad \log_{10} 100\,, \quad \log_2\left(\tfrac{1}{4}\right), \quad \log_{10} 0.001\,, \quad \log_2 \sqrt{2}\,.$$

Løsning:

$$\log_2 8 = \underline{\underline{3}} \text{ fordi } 2^3 = 8\,.$$

$$\log_5 25 = \underline{\underline{2}} \text{ fordi } 5^2 = 25\,.$$

$$\log_{10} 100 = \underline{\underline{2}} \text{ fordi } 10^2 = 100\,.$$

$$\log_2\left(\tfrac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-2}} \text{ fordi } 2^{-2} = \tfrac{1}{2^2} = \tfrac{1}{4}\,.$$

$$\log_{10} 0.001 = \underline{\underline{-3}} \text{ fordi } 10^{-3} = \tfrac{1}{10^3} = \tfrac{1}{1000} = 0.001\,.$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}} \text{ fordi } 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,.$$

Hvis du synes at dette er forvirrende, kan du prøve å gjenta for deg selv at:

Logaritmen til et tall er den eksponenten som grunntallet må opphøyes i for å få tallet.

Oppgave 2.1.

Du legger sikkert merke til at logaritmen til et tall avhenger av hvilket grunntall vi bruker. Men det er ett viktig unntak som følger direkte av at $a^0 = 1$ uansett verdi av *a*.

I alle logaritmesystemer er $\log(1) = 0$**.**

I praktisk arbeid er noen grunntall mer brukt enn andre. Gjennom flere hundre år var logaritmer med grunntall 10 svært mye brukt. Disse logaritmene kalles *Briggske logaritmer* etter den britiske matematikeren Henry Briggs som utarbeidet detaljerte tabeller over logaritmene til tall i dette logaritmesystemet. Disse logaritmene benyttes fremdeles i mange fag, for eksempel er kjemikernes pH-verdier, Richters skala for jordskjelv og decibel-skalaen basert på Briggske logaritmer.

Innen datateknologi har men stor nytte av et logaritmesystem med 2 som grunntall.

Men i matematikken er det likevel et annet grunntall som er mest brukt. Det er tallet *e* som defineres slik:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828...$$

Du finner en begrunnelse for denne definisjonen i et lite vedlegg.

Dette rare tallet *e* er så viktig at logaritmer med grunntall *e* kalles ***naturlige logaritmer.*** Vi skriver $\ln$ istedenfor $\log_e$.

2.2. Regneregler for logaritmer.

Uansett logaritmesystem gjelder disse regnereglene:

La *u* og *v* være positive tall. Da er:

(1): $\log(u \cdot v) = \log u + \log v$

(2): $\log\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log u - \log v$

(3): $\log(u^n) = n \cdot \log u$

Setning 1 bevises slik: Vi tar utgangspunkt i at $u = a^{\log_a u}$ og at $v = a^{\log_a v}$. Når vi benytter regneregler for potensregning, får vi at

$$u \cdot v = a^{\log_a u} \cdot a^{\log_a v} = a^{\log_a u + \log_a v}.$$

Men av definisjonen på logaritmer må vi også ha at

$$u \cdot v = a^{\log_a (u \cdot v)}.$$

Ved å sammenlikne eksponentene, ser vi at

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v.$$

Bevis selv Setning 2!

Så var det setning 3. Her benytter vi en annen regneregel for potenser:

$$u^n = \left(a^{\log_a u}\right)^n = a^{n \cdot \log_a u}.$$

Men av definisjonen på logaritmer må vi også ha at

$$u^n = a^{\log_a \left(u^n\right)}.$$

Ved å sammenlikne eksponentene, ser vi at

$$\log\left(u^n\right) = n \cdot \log u.$$

Eksempel 2.2: Skriv disse uttrykkene så enkelt som mulig:

a) $\ln\left(x^2\right) - \ln(2x)$.

b) $\ln\left(x^2 - y^2\right) - \ln(x - y)$

c) $\ln\left(\sqrt{8x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln 2$

Løsning:

a) $$\ln\left(x^2\right) - \ln(2x) = \ln\left(\frac{x^2}{2x}\right) = \underline{\underline{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}} = \underline{\underline{\ln x - \ln 2}}.$$

Eller:

$$\ln\left(x^2\right) - \ln(2x) = 2\ln x - (\ln 2 + \ln x) = 2\ln x - \ln x - \ln 2 = \underline{\underline{\ln x - \ln 2}} = \underline{\underline{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

b) $$\ln\left(x^2 - y^2\right) - \ln(x - y) = \ln\left(\frac{x^2 - y^2}{x - y}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{(x - y)}(x + y)}{\cancel{x - y}}\right) = \underline{\underline{\ln(x + y)}}$$

c) $$\ln\left(\sqrt{8x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln 2 = \ln\left((8x)^{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(x^{-1}\right) - \ln 2 = \tfrac{1}{2}(\ln 8 + \ln x) - 1 \cdot \ln x - \ln 2$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 2^3 + \tfrac{1}{2}\ln x - \ln x - \ln 2 = \tfrac{1}{2} \cdot 3\ln 2 + \tfrac{1}{2}\ln x - \ln x - \ln 2$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln x = \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln x) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x}\right)}} = \ln\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\ln\sqrt{\frac{2}{x}}}}$$

Oppgave 2.2.

Slike omforminger er nyttige når vi skal løse likninger som inneholder logaritmer, noe neste eksempel viser.

Eksempel 2.3: Finn x når
$$2\ln x - \ln(x+2) = 0\,.$$

Løsning: Vi starter med å omforme venstre side ved hjelp av logaritme-reglene:
$$2\ln x - \ln(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x^2\right) - \ln(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln\frac{x^2}{x+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x+2} = 1$$

Den siste overgangen skyldes at $\ln 1 = 0$. Så regner vi videre:
$$\frac{x^2}{x+2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0\,.$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Men vi kan ikke bruke løsningen $x = -1$ fordi du ved innsetting i den opprinnelige likningen vil få $2\ln(-1) - \ln 1 = 0$, og $\ln(-1)$ eksisterer ikke. Altså er den eneste brukbare løsningen
$$\underline{\underline{x = 2}}\,.$$

Du kan også komme fram til andregradslikningen på en annen (og kanskje enklere) måte:
$$2\ln x - \ln(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(x^2\right) = \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x+2\,.$$
Den siste overgangen skyldes at når to tall har samme logaritme, så må tallene være like.

Oppgave 2.3.

Vi har tidligere sett på noen enkle eksponential-likninger. Vi skal nå se på flere slike likninger der vi trenger logaritmer til å finne svaret.

Eksempel 2.4: Finn tilnærmede løsninger av disse likningene:

a) $3^x = 8$.

b) $2^x = 3^{x-1}$

Løsning: I begge oppgavene starter vi med å ta logaritmen på begge sidene av likhetstegnet, og deretter benytte at $\log\left(u^n\right) = n \cdot \log u$. For enkelhets skyld benytter vi naturlige logaritmer siden de fleste kalkulatorer beregner slike. Da får vi:

a) $3^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(3^x\right) = \ln 8 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln 3 = \ln 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\ln 8}{\ln 3} \approx \underline{\underline{1.89}}\,.$

Kontroll: $3^{1.89} \approx \underline{7.98}$.

b) $2^x = 3^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2^x\right) = \ln\left(3^{x-1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x\ln 2 = (x-1)\ln 3$.

$$x\ln 2 = x\ln 3 - \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x\ln\tfrac{3}{2} = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln\frac{3}{2}} \approx \underline{\underline{2.71}}.$$

Kontroll: $2^{2.71} \approx 6.543$ mens $3^{2.71-1} \approx 6.545$.

Oppgave 2.4.

2.3. Omregning mellom logaritmesystem.

Det er nyttig å vite hvordan man regner om fra ett logaritmesystem til et annet. Vi skal begrense oss til å se hvordan vi kan regne om mellom et vilkårlig logaritmesystem med grunntall *a* og naturlige logaritmer. Da gjelder disse sammenhengene:

$$\log_a u = \log_a e \cdot \ln u = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln u.$$

Den første sammenhengen vises slik:

$$\log_a u \overset{(1)}{=} \log_a\left(e^{\ln u}\right) \overset{(2)}{=} \ln u \cdot \log_a e$$

I overgang (1) benyttes at $u = e^{\ln u}$, og i overgang (2) benyttes logaritmeregel (3).

Vis selv den andre sammenhengen i **Oppgave 2.5**.

Eksempel 2.5: Du trenger den Briggske logaritmen til tallet 58.3, men har en kalkulator som kun kan regne med naturlige logaritmer. Bruk regneregelen i ramma ovenfor til å løse dette problemet.

Løsning: Grunntallet i det Briggske logaritmesystemet er $a = 10$. Ved hjelp av kalkulatoren finner du at $\ln 10 \approx 2.3026...$ og at $\ln 58.3 \approx 4.0656...$.
Da er

$$\log_{10} 58.3 = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln 58.3 \approx \frac{4.0656}{2.3026} \approx \underline{\underline{1.7657}}.$$

Kontroll: $10^{1.7657} \approx 58.304...$

Oppgave 2.6.