3. Eksponentialfunksjoner.

Vi avsluttet notatet om potensregning med å definere hva vi mener med uttrykket a^x der $a > 0$ mens *x* er et vilkårlig reelt tall. Vi er derfor i stand til å definere ***eksponential-funksjonen med a som grunntall*** slik:

$$f(x) = a^x \text{ der } a > 0.$$

Faktisk kan vi begrense oss til eksponentialfunksjoner der $a > 1$. For dersom $0 < a < 1$, kan vi sette $a = \frac{1}{b}$ der $b > 1$. Da blir

$$f(x) = a^x = \left(\tfrac{1}{b}\right)^x = \left(b^{-1}\right)^x = b^{-x}$$

som er en eksponentialfunksjon der grunntallet er større enn 1. Vi må bare "snu" retningen på *x*-aksen.

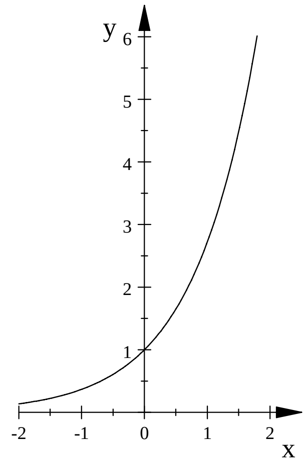
I praksis er det eksponentialfunksjoner med grunntall *e* som er mest brukt. Dersom vi snakker om eksponentialfunksjon*en*, er det så å si alltid funksjonen

$$f(x) = e^x$$

vi mener. Og det kan vi trygt gjøre, fordi $a = e^{\ln a}$ slik at

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

Dette viser at vi alltid kan omforme fra en eksponentialfunksjon med grunntall $a > 0$ til eksponentialfunksjonen med grunntall *e* bare ved å multiplisere *x* med $\ln a$. Vi kan derfor trygt begrense oss til å studere eksponentialfunksjonen $f(x) = e^x$.



Grafen til $y = f(x) = e^x$ er vist på figuren til venstre.
Vi merker oss disse egenskapene:

- Funksjonen er alltid positiv for alle verdier av *x*. $f(x) = e^x$ kan aldri bli negativ.
- Grafen går gjennom punktet $(0, 1)$.
- Når $x \to -\infty$, går e^x mot null.
- Når $x \to \infty$, går e^x mot uendelig.

Eksponentialfunksjonen brukes mye til å beskrive *naturlig vekst*. I den forbindelse er det vanlig å benytte *t* (tid) som fri variabel.

La oss se nærmere på eksponentialfunksjonen

$$y = f(t) = A \cdot e^{k \cdot t} \text{ der } k > 0.$$

Først kan vi merke oss at når $t = 0$, blir

$$y = f(0) = A \cdot e^0 = A \cdot 1 = A,$$

slik at *A* angir startverdien.

La oss gå til et vilkårlig tidspunkt $t = t_1$. Anta at ved dette tidspunktet var $y = Y_1$ slik at

$$f(t_1) = Y_1 = Ae^{k \cdot t_1}.$$

En tid *T* senere som vi skal kalle ***doblingstiden*** har *y* fordoblet seg til $2Y_1$ slik at

$$f\left(t_1+T\right)=2Y_1=Ae^{k\cdot(t_1+T)}.$$

Vi deler disse likningene på hverandre, og får

$$\frac{2Y_1}{Y_1}=\frac{\cancel{A}e^{k\cdot(t_1+T)}}{\cancel{A}e^{k\cdot t_1}} \quad\Leftrightarrow\quad 2=\frac{\cancel{e^{k\cdot t_1}}\cdot e^{k\cdot T}}{\cancel{e^{k\cdot t_1}}}=e^{k\cdot T} \quad\Leftrightarrow\quad k\cdot T=\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{k=\frac{\ln 2}{T}}}.$$

Dermed har vi fått en sammenheng mellom konstanten *k* og doblingstiden *T*.

Vi kan bruke denne sammenhengen til å foreta en nyttig omforming:

$$f\left(t\right)=A\cdot e^{k\cdot t}=A\cdot e^{\frac{\ln 2}{T}\cdot t}=A\cdot\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{T}}=A\cdot 2^{\frac{t}{T}}.$$

Her vil jo forholdet $\frac{t}{T}$ angi hvor mange doblingstider som er gått. Funksjonsverdien blir da startverdien *A* multiplisert med 2 så mange ganger som antall doblingstider angir. Naturlig, ikke sant?

Eksempel 3.1: En bakteriekoloni bruker 20 timer på å doble sin størrelse. Hvor mye vokser kolonien på

a) 8 timer?
b) 40 timer?

Løsning: Når vi har fast vekstfaktor, har vi også eksponentiell vekst. La start-størrelsen av bakteriekolonien være *A*.

a) Etter 8 timer er størrelsen blitt

$$f\left(8\right)=A\cdot 2^{\frac{8}{20}}\approx\underline{\underline{1.32A}}.$$

Kolonien har altså vokst med 32%.

b) Etter 40 timer er størrelsen blitt

$$f\left(40\right)=A\cdot 2^{\frac{40}{20}}=A\cdot 2^2=\underline{\underline{4A}}.$$

Kolonien har altså firedoblet seg.

Legg forresten merke til at $40=5\cdot 8$, og at $1.32^5\approx 4.0$. Vi kan altså oppfatte 40-timers-intervallet som 5 8-timers-intervall, med en vekst på 32% i hvert intervall. Det gir til sammen en firedobling.

Det er slett ikke alltid at eksponentialfunksjoner med grunntall *e* eller grunntall 2 er de mest nyttige, noe neste eksempel viser:

Eksempel 3.2: I en kommune øker antall innbyggere med 4% årlig. Hvor mange år tar det før antall innbyggere har økt med 50%?

Løsning: La *A* være antall innbyggere i starten. Når innbyggertallet øker med 4% hvert år, vil antall innbyggere i løpet av ett år være økt til

$$A+A\cdot\tfrac{4}{100}=A\left(1+0.04\right)=\underline{A\cdot 1.04}.$$

I løpet av *t* år vil innbyggertallet vokse til

$$A\cdot\left(1.04\right)^t.$$

Når antall innbyggere er vokst med 50%, blir

$$1.50A = A \cdot 1.04^t \quad \Leftrightarrow \quad 1.50 = 1.04^t \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1.50) = \ln\left(1.04^t\right) = t \cdot \ln(1.04)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(1.50)}{\ln(1.04)} \approx \underline{\underline{10.3}}$$

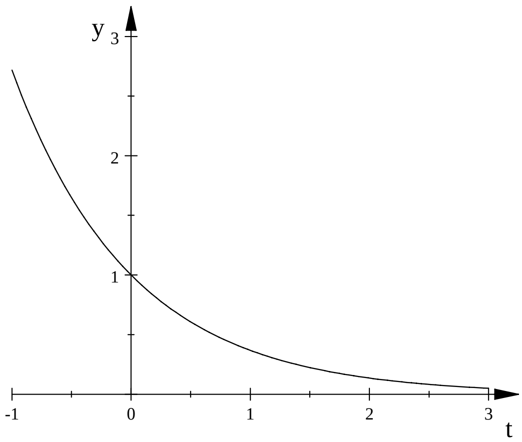
Det tar altså litt over 10 år å øke antall innbyggere med 50%.

`Oppgave` [3.1](), [3.2]().

Nå skal vi se nærmere på funksjonen

$$y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t} \text{ der } k > 0.$$

Grafen til funksjonen er vist nedenfor for $A = 1$ og $k = 1$:



Vi merker oss at også her er *A* startverdien når $t = 0$.

Vi kan nå definere en ***halveringstid*** *T* som er den tiden det tar å halvere funksjonsverdien. På samme måte som for doblingstid finner vi sammenhengen

$$k = \frac{\ln 2}{T}$$

slik at funksjonen kan omformes til

$$y = f(t) = A \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Gjennomfør detaljregningene selv i **`Oppgave` [3.3]()**,

Eksempel 3.3: En kondensator utlades gjennom en motstand. Spenningen $U(t)$ over kondensatoren er gitt ved formelen

$$U(t) = 12e^{-10t}$$

når *t* er målt i sekunder og spenningen er målt i volt.

a) Finn halveringstiden for spenningen over kondensatoren.

b) Hvor lang tid tar det før spenningen er blitt 0.1 volt?

Løsning:

a) Her er $k = 10$ slik at halveringstiden blir

$$T = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\underline{\underline{10}}} \approx \underline{\underline{0.069}} \text{ sekunder.}$$

b) $U(t)=0.1 \iff 12e^{-10t}=0.1 \iff e^{-10t}=\frac{0.1}{12} \iff -10t=\ln\left(\frac{1}{120}\right)=-\ln(120)$

$$\iff t=\underline{\underline{\frac{\ln(120)}{10}}}\approx\underline{\underline{0.48}}\text{ sekunder}$$

Oppgave 3.4.

Eksempel 3.4: En melkekartong blir satt inn i kjøleskapet. La $y(t)$ være temperaturen i melka ved tidspunktet t (målt i minutter) etter at melkekartongen ble satt inn i kjøleskapet. Vi antar nå at

$$y(t)=5+16e^{-k\cdot t}$$

der k er en konstant.

a) 1) Hva var temperaturen i melka i det øyeblikket melka ble satt inn i kjøleskapet?
   2) Hva blir temperaturen i melka når kartongen har stått lenge i kjøleskapet?

b) Det viser seg at når kartongen har stått i kjøleskapet i 1 time, har temperaturen i melka sunket til 11 grader.
   1) Bruk denne opplysningen til å finne k.
   2) Hvor lang tid tar det før temperaturen i melka er blitt 6 grader?

Løsning:

a) 1) $y(0)=5+16e^{0}=5+16\cdot 1=\underline{\underline{21}}$.

   2) $\lim_{t\to\infty} f(t)=5+16\cdot\lim_{t\to\infty} e^{-k\cdot t}=5+16\cdot 0=\underline{\underline{5}}$.

b) 1) $y(60)=11 \iff 5+16e^{-60k}=11 \iff 16e^{-60k}=6 \iff e^{-60k}=\frac{3}{8}$

$$\iff -60k=\ln\left(\frac{3}{8}\right) \iff k=\underline{\underline{-\frac{1}{60}\ln\left(\frac{3}{8}\right)}}\approx\underline{\underline{0.016}}$$

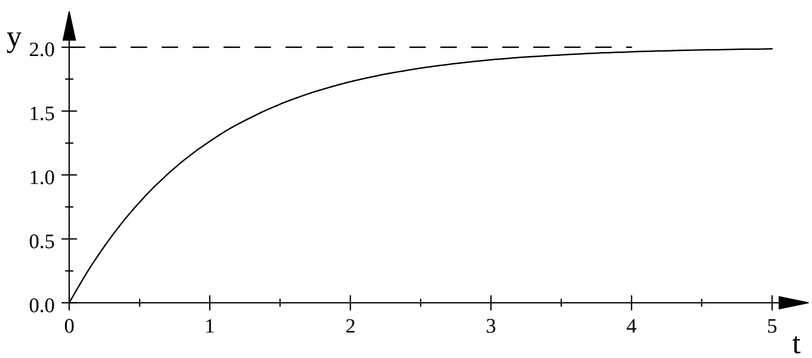
   2) $y(t)=6 \iff 5+16e^{-\left(-\frac{1}{60}\ln\left(\frac{3}{8}\right)\right)t}=6 \iff 16e^{\ln\left(\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{t}{60}}=1 \iff \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{t}{60}}=\frac{1}{16}$

$$\iff \frac{t}{60}\ln\left(\frac{3}{8}\right)=\ln\left(\frac{1}{16}\right) \iff \frac{t}{60}=\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{\ln\left(\frac{3}{8}\right)} \iff t=60\cdot\frac{\ln(16)}{\ln\left(\frac{8}{3}\right)}\approx\underline{\underline{170}}$$

Det tar altså ca. 2 timer og 50 minutter før temperaturen i melka er kommet ned i 6 grader.

Figuren nedenfor viser grafen til en funksjon av typen

$$y=f(t)=A\left(1-e^{-k\cdot t}\right)\text{ for } A=2 \text{ og } k=1.$$



Her merker vi oss at:

- Når $t=0$, er $y=A\left(1-e^{0}\right)=A(1-1)=0$.
- Når $t\to\infty$, vil $y\to A\left(1-\lim\limits_{t\to\infty}e^{-kt}\right)=A(1-0)=A$.

Denne funksjonen brukes ofte til å beskrive en størrelse som vokser gradvis mot en stasjonær verdi. Typiske eksempler kan være oppladning av en kondensator eller oppvarming av et rom.

Eksempel 3.5: Du kommer fram til hytta en kald dag, og tenner opp i ovnen. Du antar at temperaturøkingen $y(t)$ avhenger av tiden *t* slik:

$$y(t)=A\left(1-e^{-k\cdot t}\right).$$

Du merker deg at når $t=1\text{time}$ er temperaturen steget med 6.5°, og etter $t=2\text{timer}$ er temperaturen steget med 11.0°.

a) Bruk disse observasjonene til å finne *A* og *k*.

b) Hvor lang tid tar det før temperaturen har steget med 18°?

Løsning:

a) Av våre observasjoner kan vi sette opp disse to likningene:

$$y(1)=A\left(1-e^{-k}\right)=6.5$$

$$y(2)=A\left(1-e^{-2k}\right)=11.0$$

Vi deler disse likningene på hverandre, og får

$$\frac{A\left(1-e^{-2k}\right)}{A\left(1-e^{-k}\right)}=\frac{11.0}{6.5}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1-e^{-2k}}{1-e^{-k}}=1.69$$

$$1-e^{-2k}=1.69\left(1-e^{-k}\right)\quad\Leftrightarrow\quad 1-e^{-2k}=1.69-1.69e^{-k}\quad\Leftrightarrow\quad e^{-2k}-1.69e^{-k}+0.69=0$$

Nå husker vi at $e^{-2k}=\left(e^{-k}\right)^{2}$, slik at likningen over er en andregradslikning i e^{-k}. Bruker formel, og får

$$e^{-k}=\frac{-(-1.69)\pm\sqrt{(-1.69)^{2}-4\cdot 0.69}}{2}=\frac{1.69\pm 0.31}{2}=\begin{cases}\underline{1.00}\\ \underline{0.69}\end{cases}$$

Vi kan åpenbart ikke bruke løsningen $e^{-k}=1.00$ fordi denne løsningen fører til at

$$1-e^{-k}=1-e^{-2k}=0.$$

Dermed har vi at

$$e^{-k}=0.69\quad\Leftrightarrow\quad -k=\ln(0.69)\quad\Leftrightarrow\quad k\approx\underline{\underline{0.371}}.$$

Da blir

$$A\left(1-e^{-k}\right)=6.5\quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{6.5}{1-e^{-k}}=\frac{6.5}{1-0.69}=\underline{\underline{21.0}}.$$

b) Vi vet nå at temperaturøkingen er gitt ved

$$y(t)=21.0\left(1-e^{-0.371t}\right)$$

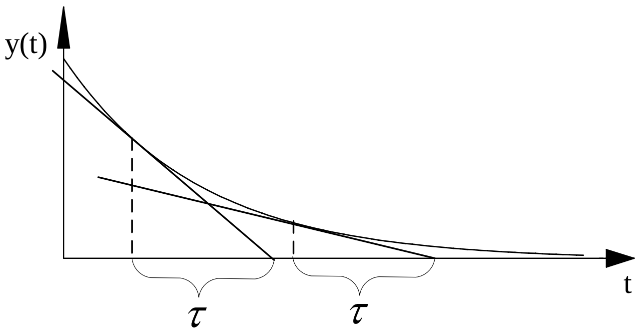
der *t* er gitt i timer. Når temperaturen er steget med 18°, er

$$18 = 21.0\left(1-e^{-0.371t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^{-0.371t} = \frac{18}{21.0} = 0.857 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-0.371t} = 1-0.857 = 0.143$$

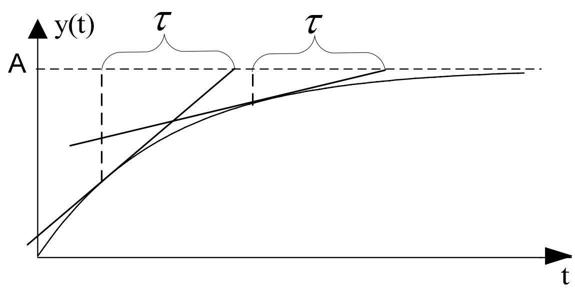
$$-0.371t = \ln(0.143) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(0.143)}{-0.371} \approx \underline{\underline{5.24}}$$

Det tar altså ca. 5 timer og et kvarter før temperaturen har steget med 18°.

Både for funksjonen $y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t}$ og for funksjonen $y = f(t) = A\left(1-e^{-k \cdot t}\right)$ kan vi definere en størrelse som vi kaller ***tidskonstanten*** τ. Når vi trekker tangenten til funksjons-grafen i et vilkårlig punkt på grafen til funksjonen $y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t}$, er tidskonstanten den tiden det tar før tangenten skjærer *t*-aksen (se figuren nedenfor).



Trekker vi tangenten til funksjonsgrafen i et vilkårlig punkt på grafen til funksjonen $y = f(t) = A\left(1-e^{-k \cdot t}\right)$, er tidskonstanten den tiden det tar før tangenten skjærer den rette linja $y = A$ (se figuren nedenfor).



Og nå kommer poenget:

Når $y = f(t) = A \cdot e^{-k \cdot t}$, er tidskonstanten $\tau = \frac{1}{k}$.

Beviset krever kjennskap til derivasjon, og er derfor dyttet ut i et lite vedlegg. Denne egenskapen gir en enkel tolking av konstanten *k*. Egenskapen er også svært nyttig i mange praktiske situasjoner, der vi utfører et eksperiment og får en kurve som ser ut til å være grafen til $y = A \cdot e^{-k \cdot t}$ eller $y = A\left(1-e^{-k \cdot t}\right)$. Trekk noen tangenter til grafen, sjekk at tidskonstantene er like store uansett hvor tangenten trekkes, og beregn $k = \frac{1}{\tau}$. Dette er en rask metode både til å sjekke om vi virkelig har en eksponentialfunksjon, og til i finne konstanten *k*.