5. Vektorrom.

5.1. Innledning.

I videregående skole er det vanlig å innføre **vektorer** som objekter med størrelse og retning, illustrert med ei pil. Slike vektorer kalles gjerne **geometriske vektorer**. Men vi oppdager snart at det kan være gunstig å framstille vektorer ved hjelp av koordinatene til vektorens endepunkt (forutsatt at startpunktet er i origo). Vektoren blir da framstilt som et **tallsett** som består av 2 eller 3 tall, avhengig av om vektoren ligger i et 2- eller 3-dimensjonalt koordinat-system. Om nødvendig bør du repetere den grunnleggende vektorregningen.

I notatet om matriser definerte vi ***linjevektorer*** og ***kolonnevektorer*** der elementene var organisert i henholdsvis vannrette *linjer* eller loddrette *kolonner*. Da begrenset vi oss ikke til vektorer med bare 2 eller 3 elementer. Vi skal nå videreføre denne tankegangen, og skal utvide vektorbegrepet til å gjelde et tallsett som består av *n* tall. Da snakker vi om en ***n*-te ordens vektor**. Dersom vi ikke sier noe annet, skal vi la vektorer være *kolonnevektorer*.

Vi kan faktisk utvide vektor-begrepet enda mer, og la enda flere sett matematiske ”objekter” enn bare tall og tallsymboler være "vektorer". Men for vårt formål er det tilstrekkelig å si at tallsett organisert i rader eller kolonner er "vektorer".

I det videre arbeidet skal vi innføre begrep og sette opp regler som egentlig kan anvendes på temmelig mange typer matematiske ”objekter”. Men vi skal visualisere begrepene og bevisene med geometriske vektorer så langt det lar seg gjøre, og begrense oss til å anvende dem på det vi kaller ”vektorer”.

5.2. Grunnleggende definisjoner og regneregler.

Vi definerer begrepene ”addisjon” og ”multiplikasjon med skalar” på samme måte som for geometriske vektorer:

La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

være to vektorer av samme orden, mens t er en skalar størrelse.
Da gjelder:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad t \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} t \cdot u_1 \\ t \cdot u_2 \\ \vdots \\ t \cdot u_n \end{bmatrix}.$$

På grunnlag av disse definisjonene kan vi utlede:

Dersom **u** og **v** er to vektorer av samme orden, og s og t er to skalarer, gjelder:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$
$$t\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=t\cdot\mathbf{u}+t\cdot\mathbf{v}$$
$$(s+t)\cdot\mathbf{u}=s\cdot\mathbf{u}+t\cdot\mathbf{u}$$

I resten av dette avsnittet skal vi forutsette at **u** og **v** er vektorer som er definert på samme måte som ovenfor, selv om vi ikke alltid presiserer det.

Vi definerer ***skalarproduktet*** av to vektorer på samme måte som for geometriske vektorer:

Skalarproduktet av to vektorer **u** og **v** av samme orden er:

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\cdots+u_n\cdot v_n\,.$$

Vi bruker den fete prikken til å angi skalarproduktet av to vektorer. Legg merke til at dersom vi bruker regnereglene for matriseregning, blir $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{v}$.

Vi finner *lengden* av en geometrisk vektor ved hjelp av Pytagoras:

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}}\,.$$

For våre mer generelle vektorer definerer vi en tilsvarende størrelse som vi kaller ***norm***:

Normen til en vektor **v** er

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+\cdots+v_n^{\,2}}=\sqrt{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}=\sqrt{\mathbf{v}^T\cdot\mathbf{v}}\,.$$

Mange lærebøker bruker skrivemåten $\|\mathbf{v}\|$ til å betegne normen til **v**.

For geometriske vektorer kjenner du begrepet *enhetsvektor*, som er en vektor med lengde 1. Generelt definerer vi en enhetsvektor (også kalt ***normert vektor***) ved å kreve at

$$|\mathbf{v}|=1 \quad\Leftrightarrow\quad v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+\cdots+v_n^{\,2}=1\,.$$

For en generell vektor **v** får vi denne regelen:

For enhver vektor **v** (som ikke har lengde null) kan vi skaffe oss en enhetsvektor $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ i samme retning som **v** slik:

$$\mathbf{e}_\mathbf{v}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{1}{\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+\cdots+v_n^{\,2}}}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}}\cdot\mathbf{v}\,.$$

Vi sier gjerne at vi ***normerer*** vektoren **v**.

***Eksempel 5.1*:** Bestem t slik at vektoren

$$\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

blir normert.

Løsning: Vektoren skrives

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3t \\ 0 \\ 4t \end{bmatrix}.$$

Normering fører til at

$$\sqrt{(3t)^2 + 0^2 + (4t)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 9t^2 + 0 + 16t^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 25t^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = \pm\tfrac{1}{5}}}.$$

For to geometriske vektorer **u** og **v** kan vinkelen mellom **u** og **v** beregnes slik:

$$\cos(\angle \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Av denne sammenhengen ser vi at:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\angle \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0.$$

Med våre mer generelle vektorer definerer vi ***ortogonalitet*** slik:

To vektorer **u** og **v** er ***ortogonale*** hvis og bare hvis

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = 0.$$

Dersom to *normerte* vektorer er ortogonale, sier vi at de er ***ortonormale***.

Dersom to eller flere vektorer er parvis ortonormale, sier vi at de danner et ***ortonormalt sett***. Definisjonen av ortonormale sett av vektorer kan komprimeres slik:

Vektorene $\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots \mathbf{v}_j, \ldots, \ \mathbf{v}_n$ utgjør et ortonormalt sett hvis og bare hvis

$$\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad i \neq j \\ 1 & \text{for} \quad i = j \end{cases}$$

Hvis du tenker geometriske vektorer, sies det egentlig at dersom en vektor skalarmultipliseres med en annen vektor, skal resultatet bli lik null ("vinkelrett på"). Dersom vektoren skalar-multipliseres med seg selv, skal resultatet bli lik 1 ("lengde 1").

De tre enhetsvektorene

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

langs koordinataksene i et vanlig 3-dimensjonalt koordinatsystem (som du sikkert kjenner fra før) er et eksempel på et slikt ortonormalt sett.

***Eksempel 5.2*:** Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

utgjør et ortonormalt sett.

Løsning: Vi ser direkte at $|\mathbf{v}_1| = 1$.

Videre er

$$|\mathbf{v}_2| = \sqrt{0^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{0+9+16}{25}} = 1.$$

På samme måte er $|\mathbf{v}_3| = 1$.

Altså er alle vektorene normerte.

Så må vi vise at de er parvis ortogonale. Vi ser at

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \tfrac{3}{5} + 0 \cdot \tfrac{4}{5} = 0.$$

På samme måte blir $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_3 = 0$.

Og til slutt er

$$\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_3 = 0 \cdot 0 + \tfrac{3}{5} \cdot \left(-\tfrac{4}{5}\right) + \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{3}{5} = 0.$$

Altså er vektorene parvis ortogonale. Siden de også er normerte, utgjør de et ortonormalt sett.

Oppgave 5.1.

Synes du at framgangsmåten ovenfor var plundrete? Heldigvis fins det en framgangsmåte som er enklere hvis du har *n* vektorer som alle er av orden *n*, og du har dataverktøy som kan regne med matriser.

Først en definisjon:

En kvadratisk matrise **A** er *ortogonal*
$\Updownarrow$ def.
Kolonnevektorene i matrisen utgjør et ortonormalt sett.

Strengt tatt burde slike matriser vært kalt orto*normale* matriser siden kolonnevektorene må være både ortogonale og normerte. Men vi skal ikke påta oss å reformere en innarbeidet språkbruk, og skal bruke standard-betegnelsen orto*gonal* matrise. Slike ortogonale matriser har mange viktige egenskaper, men det skal vi komme tilbake til senere.

Så til poenget:

$$\mathbf{A} \text{ er ortogonal}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$$

Ved hjelp av denne setningen kan vi vise at *n* vektorer av orden *n* utgjør et ortonormalt sett ved å danne en matrise **A** der disse vektorene er kolonner. Dersom $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, er utgjør vektorene et ortonormalt sett. Eksemplet nedenfor illustrerer framgangsmåten, og indikerer også hvordan setningen kan bevises.

***Eksempel 5.3*:** Vis at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

utgjør et ortonormalt sett ved å vise at matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

er ortogonal.

Løsning: Du ser direkte at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er kolonner i **A**. Vi regner ut

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25}{25} \end{bmatrix} = \mathbf{I}\,.$$

Følgelig er **A** ortogonal, slik at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ utgjør et ortonormalt sett.

Dersom du fulgte med på hva som skjedde da du multipliserte sammen $\mathbf{A}^T$ og **A**, ville du sett at elementene langs hoveddiagonalen ble kvadratet av normene til vektorene, mens elementene utenfor hoveddiagonalen ble skalarproduktet av to vektorer. Vektorene utgjør et ortonormalt sett dersom alle disse skalarproduktene er lik null samtidig som normene er lik 1.

Oppgave 5.2.

5.3. Lineær (u-)avhengighet.

Vi trenger noen viktige definisjoner:

La $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$ være vektorer av samme orden,
mens a_1, a_2, … a_n er vanlige tall.

1) Uttrykk av formen
$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$
kalles en **lineær kombinasjon** av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$.

2) Vi sier at $\mathbf{v}_0$ er **lineært avhengig** av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$
hvis og bare hvis det fins tall a_1, a_2, … a_n forskjellig fra null slik at
$$\mathbf{v}_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n .$$

3) Vi sier at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$ er **lineært uavhengige**
hvis og bare hvis likningen
$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$
kun er oppfylt dersom $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Av definisjonene ovenfor ser vi at dersom en vektor $\mathbf{v}_0$ kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$, så er vektorene $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$ lineært avhengige. Hvis det ikke er mulig å skrive $\mathbf{v}_0$ som en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$, så er vektorene $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, … $\mathbf{v}_n$ lineært *u*avhengige.

Disse begrepene kan illustreres ved hjelp av geometriske vektorer:
Gitt de to vektorene
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Et uttrykk som
$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$
er da en *lineær kombinasjon* av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.
En vektor
$$\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$
er *lineært avhengig* av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ (eller: de tre vektorene $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er *lineært avhengige*).

***Eksempel 5.4*:** Undersøk om vektoren
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Løsning: Skal prøve å finne tall a_1 og a_2 slik at

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \,.$$

Dette kan skrives

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -1 &= 3a_1 - a_2 \\ 2 &= -2a_1 + 3a_2 \end{aligned}$$

Dette likningssystemet kan for eksempel løses ved å multiplisere øverste likning med 3 og addere:

$$-1 = 7a_1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_1 = -\tfrac{1}{7}} \,.$$

Dette gir videre

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3\cdot\left(-\tfrac{1}{7}\right) + 1 = \underline{\tfrac{4}{7}} \,.$$

Vi har altså funnet at

$$\underline{\underline{\mathbf{u} = -\tfrac{1}{7}\mathbf{v}_1 + \tfrac{4}{7}\mathbf{v}_2}}$$

slik at vektorene **u**, $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært avhengige.

Som kontroll kan du sette inn på høyre side i løsningen, og får

$$-\tfrac{1}{7}\mathbf{v}_1 + \tfrac{4}{7}\mathbf{v}_2 = -\tfrac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \tfrac{4}{7}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} - \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} + \frac{12}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{u}} \,.$$

***Eksempel 5.5*:**

a) Undersøk om vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

b) Endre $\mathbf{v}_1$ til $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Undersøk om vektorene nå er lineært uavhengige.

Løsning:

a) Må undersøke om det er mulig å finne tall a_1, a_2 og a_3 forskjellig fra null slik at

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \,.$$

Setter opp likningen på komponentform:

$$a_1\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller

$$-2a_1 + a_2 = 0$$
$$-a_2 - 2a_3 = 0$$
$$3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$$

Dette er et homogent likningssett. Fra teorien for slike likningssett vet vi at det har løsning forskjellig fra null-løsningen hvis og bare hvis determinanten til koeffisientmatrisen har verdi lik null. Vi regner ut denne determinanten etter første linje:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -2(-1+4) - 1(0+6) = \underline{-12}\,.$$

Vi ser at determinanten har verdi forskjellig fra null. Altså har likningssettet kun løsningen $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, slik at vektorene er lineært uavhengige.

Geometrisk kan dette tolkes slik: Vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er tre vektorer i rommet. At de er lineært uavhengige, innebærer at det ikke er mulig å uttrykke en av dem som en lineær kombinasjon av de andre to.

b) Vi skal nå se hva som skjer dersom vi endrer $\mathbf{v}_1$ til

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Da blir determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 2(-1+4) - 1(0+6) = \underline{0}\,.$$

Da fins det andre løsninger av likningssettet enn $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, og vektorene blir lineært avhengige. Vi bruker Gauss-eliminasjon til å løse det tilhørende likningssettet

$$\begin{array}{lll} 2a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \quad \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right) & 2a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 & 2a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \\ 0a_1 - a_2 - 2a_3 = 0 \quad\quad \downarrow \quad \Leftrightarrow & 0a_1 - a_2 - 2a_3 = 0 \quad \cdot\left(\tfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow & 0a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \leftarrow \hookleftarrow & 0a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 + a_3 = 0 \quad \hookleftarrow & 0a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \end{array}$$

Av den nederste likningen ser vi at en av koeffisientene (for eksempel a_2) kan velges fritt. Deretter blir

$$a_2 + 2a_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_3 = -\tfrac{1}{2}a_2}$$

og

$$2a_1 + a_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a_1 = -\tfrac{1}{2}a_2}\,.$$

Det kan være naturlig å velge $a_2 = 2$. Vi får da $a_1 = a_3 = -1$. Vi har altså sammenhengen

$$-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

som viser at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er lineært avhengige.

Geometrisk kan dette tolkes slik: Uttrykket

$$-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

kan omformes til

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 .$$

Da må $\mathbf{v}_1$ ligge i det planet som $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ spenner ut. Dermed kan en av disse vektorene (for eksempel $\mathbf{v}_1$) uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre to.

Når vi undersøker om et sett vektorer er lineært (u-)avhengige, er ofte antall vektorer lik vektorenes orden. Da kan vi bruke denne setningen:

La $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots\ \mathbf{v}_n$ være *n* vektorer av orden *n*.
Dann matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}.$$

Da er vektorene $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots\ \mathbf{v}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0 .$$

Du ser vel at eksemplet ovenfor illustrerer denne setningen?

Setningen ovenfor er egentlig et spesialtilfelle av en mer generell setning (som vi ikke skal bevise):

La $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots\ \mathbf{v}_n$ være *n* vektorer av samme orden.
Dann matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}.$$

Da er vektorene $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots\ \mathbf{v}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis rangen til **A** er lik *n*.

***Eksempel 5.6*:**

a) Undersøk om vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

b) Undersøk om vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-2\\3\\0\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

Løsning:

a) Danner matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen har rang 2 fordi vi har undermatriser av 2. orden med determinant forskjellig fra 0. Siden rangen er forskjellig fra antall vektorer, er vektorene lineært avhengige.

b) Danner matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Også her finner vi lett undermatriser av 2. orden der determinanten er forskjellig fra 0. Da har matrisen rang 2 som er lik antall vektorer, og vektorene er derfor lineært uavhengige.

Oppgave 5.3.

5.4. Vektorrom.

Vi kan definere begrepet **vektorrom** slik:

La $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots\ \mathbf{v}_n$ være vektorer av samme orden.
Mengden av vektorer

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

utgjør **vektorrommet utspent av** $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots\ \mathbf{v}_n$.

Vi definerer **dimensjonen** til et vektorrom slik:

Dimensjonen til et vektorrom er det største antall lineært uavhengige vektorer i vektorrommet.

Disse begrepene må vi illustrere med noen eksempler:

***Eksempel 5.7*:** Bestem dimensjonene til de vektorrommene som utspennes av vektorene

a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$

b) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$

c) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Løsning:

a) Vi ser direkte at $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ og at $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1$. Dermed er det kun *en* lineært uavhengig vektor (for eksempel $\mathbf{v}_1$) siden $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ kan uttrykkes ved $\mathbf{v}_1$. Vektorrommet har derfor dimensjon 1. Hvis vektorene oppfattes som geometriske vektorer, består vektorrommet av alle vektorer som ligger langs den rette linja som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ ligger langs.

b) I eksempel 5.6a viste vi at disse vektorene er lineært avhengige. Men vi ser også at for eksempel $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært *u*avhengige fordi

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0 .$$

Dermed har vektorrommet dimensjon 2. Hvis vektorene oppfattes som geometriske vektorer, vil vektorrommet bestå av alle vektorer som ligger i det planet som $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ utspenner. Ser du forresten at $\mathbf{v}_3 = -3\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2$?

c) I eksempel 5.6b viste vi at disse vektorene er lineært uavhengige. Vektorene vil dermed utspenne et vektorrom med dimensjon 2 som består av alle vektorer som er lineære kombinasjoner av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Hvis vektorene oppfattes som geometriske vektorer, vil vektorrommet bestå av alle vektorer som ligger i det planet som $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ utspenner.

Vi tar for oss et vektorrom som er utspent av *n* ***lineært uavhengige*** vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$. Disse vektorene kan vi kalle en ***basis*** for vektorrommet. Dette betyr at enhver vektor **x** i vektorrommet kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av disse basisvektorene. Men kan vi finne andre sett basisvektorer? Setningene nedenfor (som vi ikke skal bevise) gir svaret:

Ethvert sett av *n* lineært uavhengige vektorer som tilhører samme *n*-dimensjonale vektorrom, kan brukes som basisvektorer for dette vektor-rommet.

Enhver vektor **x** som tilhører et vektorrom, kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av basisvektorene på en og kun en måte.

Av alle mulige sett basisvektorer, er det ett sett som er gunstigere enn de andre:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Disse basisvektorene skal vi kalle ***vektorrommets standard basis.*** De svarer til de enhets-vektorene $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ som du sikket kjenner fra geometriske vektorer. Som eksempel kan en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

skrives som en lineær kombinasjon av vektorene i standard basis slik:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3}}\,.$$

5.5. Skifte av basis.

I et *n*-dimensjonalt vektorrom har vi en basis B gitt ved *n* lineært uavhengige basisvektorer $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_n$. Enhver vektor **v** i dette vektorrommet kan da skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_n$, d.v.s. at det fins et entydig tallsett x_1, x_2, …, x_n slik at

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n\,.$$

En annen skrivemåte kan imidlertid være mer hensiktsmessig:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathrm{B}} = \mathbf{v}_{\mathrm{B}}$$

der den lille $_{\mathrm{B}}$ -en som lav indeks angir at $\mathbf{v}_{\mathrm{B}}$ inneholder komponentene til vektoren **v** i basisen B.

Det kan ofte være hensiktsmessig å uttrykke vektoren **v** ved hjelp av andre basisvektorer enn de som inngår i B. Vi kan da lage oss en ny basis C som består av *n* andre lineært uavhengige basisvektorer $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, …, $\mathbf{c}_n$. Det fins da tall y_1, y_2, …, y_n som er slik at

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2 + \ldots + y_n\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathrm{C}} = \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\,.$$

Dersom vi skal gå over fra en basis til en annen, må vi kjenne en sammenheng mellom de to basisene. Vi skal illustrere problemet med et eksempel.

Eksempel 5.8: En basis B er gitt ved to basisvektorer $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$. En vektor **v** er gitt ved

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}} = \mathbf{v}_{\mathrm{B}}\,.$$

En annen basis C er gitt ved basisvektorene $\mathbf{c}_1$ og $\mathbf{c}_2$ der

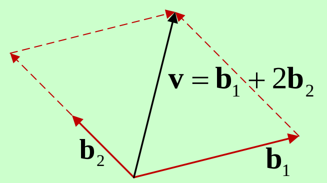
$$\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}} = \mathbf{c}_{1\mathrm{B}}$$

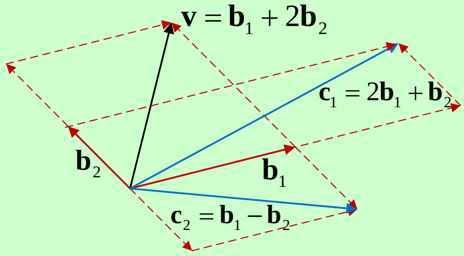
og

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}} = \mathbf{c}_{2\mathrm{B}} \,.$$

Finn **v** i basisen C (d.v.s. finn **v** uttrykt ved basisvektorene $\mathbf{c}_1$ og $\mathbf{c}_2$).

Løsning:





Til venstre ser du de to basisvektorene $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ samt vektoren

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 \,.$$

Så forkludrer vi figuren ved å innføre de nye basis-vektorene $\mathbf{c}_1$ og $\mathbf{c}_2$ (se figuren nedenfor til venstre).

Vi skal nå finne to tall y_1 og y_2 slik at

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2 \,.$$

Vi setter inn at $\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ og $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, og får

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= y_1(2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + y_2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \\ &= (2y_1 + y_2)\mathbf{b}_1 + (y_1 - y_2)\mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

Nå har vi fått to uttrykk for **v** uttrykt ved $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$. Disse uttrykkene må være like. Dette gir likningssystemet

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &= 1 \\ y_1 - y_2 &= 2 \end{aligned}$$

Vi løser likningssystemet med matriseregning, og får:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

Altså kan **v** skrives

$$\mathbf{v} = \underline{\underline{1\mathbf{c}_1 - 1\mathbf{c}_2}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{C}}}} \,.$$

Dette virker rimelig ut fra figuren.

Framgangsmåten i eksemplet ovenfor kan godt brukes i alle slike problemer. Men vi skal utvikle en metode som gjør at slike problem kan løses ved direkte matrisemultiplikasjon. Da må vi først se nærmere på den matriselikningen som vi fikk fra likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Du ser at høyresiden av matriselikningen er vektoren $\mathbf{v}_{\mathrm{B}}$, mens vektoren

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{\mathrm{C}}.$$

Videre ser du at kolonnene i den kvadratiske matrisen består av basisvektorene $\mathbf{c}_{1\mathrm{B}}$ og $\mathbf{c}_{2\mathrm{B}}$. Vi kan altså skrive

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1\mathrm{B}} & \mathbf{c}_{2\mathrm{B}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{C}} = \mathbf{v}_{\mathrm{B}}.$$

Dette er ikke noen tilfeldighet. I et vedlegg (som jeg sterkt vil anbefale at du går gjennom) vil du se at:

Et vektorrom har en basis B gitt ved basisvektorene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$,
og en annen basis C gitt ved basisvektorene $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$.
Anta videre at vi kjenner $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ uttrykt ved $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, slik at $\mathbf{c}_{1\mathrm{B}}, \mathbf{c}_{2\mathrm{B}}, \ldots, \mathbf{c}_{n\mathrm{B}}$ inneholder komponentene til $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ i basisen B.

La $\mathbf{v}_{\mathrm{B}}$ og $\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$ inneholde komponentene til en vektor **v** i henholdsvis B- og C-basisen. Da er

$$\mathbf{v}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1\mathrm{B}} & \mathbf{c}_{2\mathrm{B}} & \cdots & \mathbf{c}_{n\mathrm{B}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{C}} = \mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{C}}$$

der

$$\mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1\mathrm{B}} & \mathbf{c}_{2\mathrm{B}} & \cdots & \mathbf{c}_{n\mathrm{B}} \end{bmatrix}$$

kalles **overgangsmatrisen fra C til B**.

Virker dette kryptisk? La oss vende tilbake til eksemplet vårt.

Eksempel 5.9: En basis B er gitt ved to basisvektorer $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$. En vektor **v** er gitt ved

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}}.$$

En annen basis *C* er gitt ved basisvektorene $\mathbf{c}_1$ og $\mathbf{c}_2$ der

$$\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}}$$

og

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{B}}.$$

Bruk resultatene ovenfor til å finne **v** i basisen C.

Løsning: Med utgangspunkt i setningen i ramme kan vi nå direkte sette opp at

$$\mathbf{v}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1\mathrm{B}} & \mathbf{c}_{2\mathrm{B}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{C}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\mathrm{C}}.$$

Vi multipliserer *foran* med

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(-1)-1\cdot 1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

og får

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{C}}.$$

Dermed blir

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2 = \underline{\underline{1\mathbf{c}_1 - 1\mathbf{c}_2}}.$$

En liten sluttmerknad: I uttrykket

$$\mathbf{v}_{\mathrm{B}} = \mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{C}}$$

brukes matrisen

$$\mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1\mathrm{B}} & \mathbf{c}_{2\mathrm{B}} & \cdots & \mathbf{c}_{n\mathrm{B}} \end{bmatrix}$$

til å regne om *fra* basisen C *til* basisen B. Vi multipliserer foran med $(\mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}})^{-1}$, og får

$$(\mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}})^{-1} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{B}} = \mathbf{v}_{\mathrm{C}}.$$

Men da ser vi at matrisen $(\mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}})^{-1}$ kan brukes til å regne om *fra* basisen C *til* basisen B. Den blir derfor en overgangsmatrise fra B til C, og skrives $\mathbf{M}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}$. Dermed har vi sammenhengen

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = (\mathbf{M}_{\mathrm{C}\to\mathrm{B}})^{-1}.$$

Oppgave 5.4.

Det fins mange varianter av problemstillingen ovenfor. En vanlig variant er at vi kjenner basisvektorene i basisen B uttrykt ved standard basis, og skal regne om mellom standard basis og basisen B. Sammenhengen i ramma ovenfor kan da omskrives slik:

La kolonnevektorene $\mathbf{v}_{\mathrm{S}}$ og $\mathbf{v}_{\mathrm{B}}$ inneholde koeffisientene til en vektor $\mathbf{v}$ i henholdsvis standard basis og basisen B, mens en matrise

$$\mathbf{M}_{\mathrm{B}\to\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}_{\mathrm{S}}$$

inneholder koeffisientene til basisvektorene i B uttrykt ved standard basis. Da er

$$\mathbf{v}_{\mathrm{S}} = \mathbf{M}_{\mathrm{B}\to\mathrm{S}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_{\mathrm{B}} = (\mathbf{M}_{\mathrm{B}\to\mathrm{S}})^{-1} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{S}}.$$

Dette må vi illustrere med et eksempel:

Eksempel 5.10: En basis B i et 2-dimensjonalt vektorrom er gitt i forhold til standard basis ved

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}_S, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_S.$$

a) Finn koeffisientene i B for en vektor **v** som er gitt i forhold til standard basis ved

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}_S.$$

b) Finn koordinatene i standard basis for en vektor **v** som er gitt i basisen B ved

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B.$$

Løsning: Vi starter med å sette opp

$$\mathbf{M}_{B\to S} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]_S = \underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathbf{M}_{B\to S})^{-1} = \frac{1}{3\cdot 1 - (-1)(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}$$

a) $$\mathbf{v}_B = (\mathbf{M}_{B\to S})^{-1} \cdot \mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_B$$

slik at

$$\mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2}}.$$

b) $$\mathbf{v}_S = \mathbf{M}_{B\to S} \cdot \mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}_S}}.$$

Dette siste resultatet kontrollerer vi lett ved direkte innsetting:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 = -\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 5.5.

Den siste problemstillingen vi skal ta opp, er overgang mellom to basiser B og C som begge er gitt i forhold til standard basis. Vi lar som før kolonnevektorene $\mathbf{v}_S$, $\mathbf{v}_B$ og $\mathbf{v}_C$ inneholde koeffisientene til vektor **v** i henholdsvis standard basis og basisene B og C, mens kolonnene i matrisene $\mathbf{M}_{B\to S}$ og $\mathbf{M}_{C\to S}$ inneholder basisvektorene i henholdsvis B og C uttrykt ved standard basis. Da er

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{M}_{B\to S} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{M}_{C\to S} \cdot \mathbf{v}_C.$$

Ved hjelp av den siste likheten i ramma ovenfor kan vi nå finne koeffisientene til **v** i den ene basisen når vi kjenner koeffisientene i den andre. Dette er illustrert i eksemplet nedenfor:

Eksempel 5.11: En basis B er gitt ved basisvektorene

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}_S, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_S.$$

En annen basis C er gitt ved basisvektorene

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_S, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_S.$$

Begge disse basisene er gitt i forhold til standard basis S.

En vektor **v** er gitt i B ved

$$\mathbf{v}_B = 2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 .$$

Finn vektoren **v** i C (d.v.s. finn **v** uttrykt ved $\mathbf{c}_1$ og $\mathbf{c}_2$).

Løsning: Vi skal nå finne $\mathbf{v}_C$. Da benytter vi at

$$\mathbf{M}_{B\to S} \cdot \mathbf{v}_B = \mathbf{M}_{C\to S} \cdot \mathbf{v}_C \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_C = \left(\mathbf{M}_{C\to S}\right)^{-1} \cdot \mathbf{M}_{B\to S} \cdot \mathbf{v}_B .$$

Vi regner ut de matrisene som inngår:

$$\mathbf{M}_{C\to S} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2]_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{M}_{C\to S}\right)^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 - (-1)\cdot 2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}$$

Overgangsmatrisen fra B til C blir da

$$\mathbf{M}_{B\to C} = \left(\mathbf{M}_{C\to S}\right)^{-1} \cdot \mathbf{M}_{B\to S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}}$$

slik at

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{M}_{B\to C} \cdot \mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \underline{\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}_C} .$$

Vi kan altså skrive

$$\underline{\underline{\mathbf{v} = -\tfrac{5}{3}\mathbf{c}_1 + \tfrac{4}{3}\mathbf{c}_2}} .$$

Oppgave 5.6.

Når du skal regne om fra en basis til en annen, er det ofte sikrest å gå tilbake til den framgangsmåten som vi benyttet i eksempel 5.8. Men hvis du holder tunga rett i munnen og klarer å sette opp de riktige overgangsmatrisene, er det raskest å benytte de sammenhengene som er rammet inn. Disse sammenhengene får vi også bruk for senere, bl.a. i forbindelse med *transformasjoner*.