# 6. Transformasjoner.

## *6.1. Definisjoner.*

Vi slår til med en definisjon:

En **transformasjon** $T$ fra et vektorrom $V$ til et annet vektorrom $W$ er en forskrift som til enhver vektor $\mathbf{x}$ i $V$ tilordner en og kun en vektor $\mathbf{y}$ i $W$.
Vi skriver $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$.

Merk likheten med funksjonsbegrepet. Mens en *funksjon* $y = f(x)$ virker på et *tall* $x$, så vil en *transformasjon* $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ virke på en *vektor* $\mathbf{x}$.

***Eksempel 6.1*:** En transformasjon er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}.$$

Finn $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

*Løsning*: Vi setter inn:

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 - (-1) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}}}.$$

I eksemplet ovenfor transformerte du fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$. Men det er ikke nødvendig å transformere mellom vektorrom av samme dimensjon, slik neste eksempel viser.

***Eksempel 6.2*:** En transformasjon er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2x_1 \\ x_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}.$$

Finn $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

*Løsning*: Vi setter inn:

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 - 2 \\ 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$

Skal vi være pirkete, bør vi angi hvilket vektorrom vi transformerer fra, og hvilket vektorrom vi transformerer til. En fullstendig definisjon av transformasjonen i eksemplet ovenfor bør derfor se omtrent slik ut:

”En transformasjon $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved … ” osv.

## *6.2. Lineære transformasjoner.*

Vi skal nå definere **lineære transformasjoner**:

La $V$ og $W$ være to vektorrom. En transformasjon $T:V \to W$ er **lineær**

$\Updownarrow$ def.

For alle vektorer **u** og **v** i $V$, og alle tall $a$ og $b$, gjelder:

$$T(a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{v}) = a\cdot T(\mathbf{u})+b\cdot T(\mathbf{v}).$$

Vi kan også splitte opp betingelsen i to trinn:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) \quad \text{og} \quad T(a\cdot\mathbf{v}) = a\cdot T(\mathbf{v}).$$

Lineære transformasjoner er hensiktsmessig av flere grunner. Foreløpig kan vi merke oss at dersom $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \dots,\ \mathbf{b}_n$ er basisvektorer i et vektorrom, og vi ønsker å transformere vektorer av formen

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$$

over i et nytt vektorrom med en lineær transformasjon, blir

$$T(\mathbf{v}) = T(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n) = x_1\cdot T(\mathbf{b}_1) + x_2\cdot T(\mathbf{b}_2) + \cdots + x_n\cdot T(\mathbf{b}_n).$$

Vi kan altså nøye oss med å transformere basisvektorene og beholde koeffisientene urørt.

Det kan fort bli plundrete å benytte definisjonen ovenfor til å undersøke om en transformasjon er lineær eller ikke, noe eksemplene nedenfor vil illustrere.

***Eksempel 6.3*:** En transformasjon $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_3 + 2x_1 \end{bmatrix}.$$

Undersøk om denne transformasjonen er lineær.

*Løsning:* Har to vilkårlige tall $a$ og $b$, og danner to vektorer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Strategien går ut på at jeg finner $T(a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{v})$ for seg, og $a\cdot T(\mathbf{u})+b\cdot T(\mathbf{v})$ for seg, og ser om de to uttrykkene er like.

For den gitte transformasjonen er

$$T(a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{v})=T\left(a\cdot\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}a\cdot u_1+b\cdot v_1\\a\cdot u_2+b\cdot v_2\\a\cdot u_3+b\cdot v_3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2(a\cdot u_2+b\cdot v_2)\\(a\cdot u_1+b\cdot v_1)-(a\cdot u_3+b\cdot v_3)\\(a\cdot u_3+b\cdot v_3)+2(a\cdot u_1+b\cdot v_1)\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}2(a\cdot u_2+b\cdot v_2)\\a(u_1-u_3)+b(v_1-v_3)\\a(2u_1+u_3)+b(2v_1+v_3)\end{bmatrix}}$$

Videre er

$$a\cdot T(\mathbf{u})+b\cdot T(\mathbf{v})=a\cdot T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right)+b\cdot T\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right)=a\cdot\begin{bmatrix}2u_2\\u_1-u_3\\u_3+2u_1\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}2v_2\\v_1-v_3\\v_3+2v_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2a\cdot u_2\\a\cdot u_1-a\cdot u_3\\a\cdot u_3+2a\cdot u_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2b\cdot v_2\\b\cdot v_1-b\cdot v_3\\b\cdot v_3+2b\cdot v_1\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}2(a\cdot u_2+b\cdot v_2)\\a(u_1-u_3)+b(v_1-v_3)\\a(u_3+2u_1)+b(v_3+2v_1)\end{bmatrix}}$$

Vi ser at transformasjonen er lineær fordi

$$T(a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{v})=a\cdot T(\mathbf{u})+b\cdot T(\mathbf{v}).$$

***Eksempel 6.4*:** En transformasjon $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+3\\x_1\cdot x_2\end{bmatrix}.$$

Undersøk om denne transformasjonen er lineær.

*Løsning*: Følger samme strategi som i forrige eksempel, ved at jeg har to vilkårlige tall *a* og *b*, og danner to vektorer

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\quad\text{og}\quad\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}.$$

For den gitte transformasjonen er

$$T(a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{v})=T\left(a\cdot\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}a\cdot u_1+b\cdot v_1\\a\cdot u_2+b\cdot v_2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\underline{\begin{bmatrix}a\cdot u_1+b\cdot v_1+3\\(a\cdot u_1+b\cdot v_1)(a\cdot u_2+b\cdot v_2)\end{bmatrix}}$$

og

$$a\cdot T(\mathbf{u})+b\cdot T(\mathbf{v})=a\cdot T\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right)+b\cdot T\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)=a\cdot\begin{bmatrix}u_1+3\\u_1\cdot u_2\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}v_1+3\\v_1\cdot v_2\end{bmatrix}$$

$$=\underline{\begin{bmatrix}a\cdot u_1+b\cdot v_1+3a+3b\\a\cdot u_1\cdot u_2+b\cdot v_1\cdot v_2\end{bmatrix}}$$

Her er verken første- eller andrekoordinaten like i de to uttrykkene. Altså er transformasjonen ikke lineær fordi

$$T(a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{v})\neq a\cdot T(\mathbf{u})+b\cdot T(\mathbf{v}).$$

Det er flere grunner til at vi setter pris på *lineære* transformasjoner, blant annet denne:

En transformasjon $\mathbf{y}=T(\mathbf{x})$ er lineær hvis og bare hvis det eksisterer en og kun en matrise **A** slik at $\mathbf{y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$

Vi skal ikke bevise denne setningen.

***Eksempel 6.5:*** Vi henter transformasjonen fra Eksempel 6.3, som vi vet er lineær:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_3 + 2x_1 \end{bmatrix}.$$

Skriv denne transformasjonen på matriseform.

*Løsning*: Ved å bruke regneregler for matrisemultiplikasjon, ser vi at

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_3 + 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Altså kan transformasjonen skrives

$$\mathbf{y}=T(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}$$

Oppgave 6.1.

## 6.3. Noen vanlige transformasjoner.

Hittil har vi snakket om transformasjoner fra et vektorrom til et annet. Men vi kan godt transformere en vektor **x** over i en ny vektor **y** i samme vektorrom. På denne måten kan vektorer flyttes, speiles, dreies osv.

Vi skal nå se på noen slike transformasjoner som forekommer vanlig:

- **Translasjon** (flytting).
- **Skalering** (forstørring / forminskning).
- **Speiling**.
- **Rotasjon**.

Vi skal illustrere disse transformasjonene med 2-dimensjonale geometriske vektorer, der en vektor

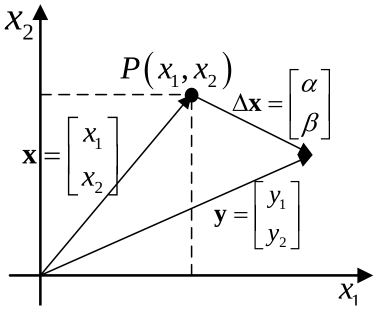
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

transformeres over til en annen vektor

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right).$$

Etterpå skal vi se hvordan disse transformasjonene kan benyttes til å lage enkel 2-dimensjonal datagrafikk.

### 6.3.1. Translasjon.




Et punkt P har koordinatene $(x_1, x_2)$. Når vi skal flytte dette punkt en strekning

$$\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

innfører vi vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

og bruker transformasjonen

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \alpha \\ x_2 + \beta \end{bmatrix}.$$

### 6.3.2. Skalering.

Anta at førstekoordinaten til en vektor **x** skal forstørres med en faktor $k_1$, mens andre-koordinaten skal forstørres med en faktor $k_2$. Da får vi en ny vektor **y**. Transformasjonen blir altså

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cdot x_1 \\ k_2 \cdot x_2 \end{bmatrix}.$$

Men dette kan skrives som en matrisemultiplikasjon:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cdot x_1 \\ k_2 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}_{\mathrm{K}} \cdot \mathbf{x}.$$

Matrisen

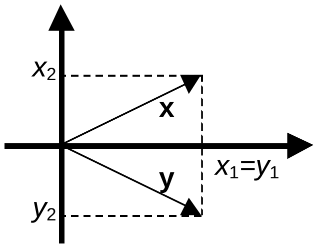
$$\mathbf{A}_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

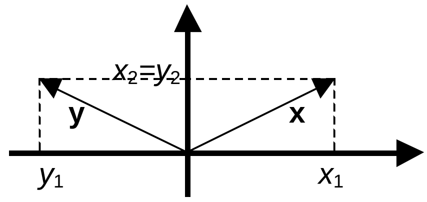
er derfor en **skaleringsmatrise**. Siden denne transformasjonen kan utføres som en matrise-multiplikasjon, bli dette en lineær transformasjon. Du ser sikkert selv hvordan vi kan generalisere til et *n*-dimensjonalt vektorrom.

### 6.3.3. Speiling.

Vi har mange forskjellige former for speiling. I et 2-dimensjonalt vektorrom kan du ha speiling om en linje eller speiling om et punkt. I et 3-dimensjonalt vektorrom kan du ha speiling om et plan, om en linje eller om et punkt. I vektorrom med høyere dimensjon blir bildet enda mer komplisert.

Vi skal begrense oss til speiling om en koordinatakse i et 2-dimensjonalt vektorrom. Figurene nedenfor viser de to situasjonene som kan oppstå.




Til venstre ser du speiling om førsteaksen. Transformasjonen blir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan derfor innføre en ***transformasjonsmatrise for speiling om førsteaksen***, som blir

$$\mathbf{A}_{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

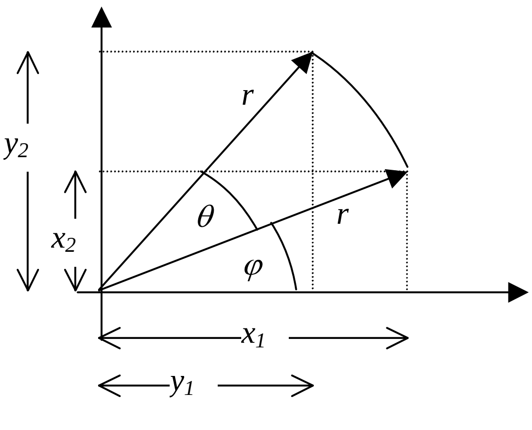
Til høyre ovenfor ser du speiling om andreaksen. Transformasjonen blir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Her har vi en ***transformasjonsmatrise for speiling om andreaksen*** som blir

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 6.3.4. Rotasjon om origo.




Nå blir det verre. Figuren til venstre viser en vektor med lengde $r$ som roterer en vinkel $\theta$.

Koordinatene endres da fra $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ til $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Av figuren ser du at

$$\begin{aligned} y_1 &= r\cos(\varphi + \theta) \\ &= r(\cos\varphi \cdot \cos\theta - \sin\varphi \cdot \sin\theta) \\ &= (r\cos\varphi)\cos\theta - (r\sin\varphi)\sin\theta \\ &= \underline{x_1\cos\theta - x_2\sin\theta} \end{aligned}$$

og at

$$\begin{aligned} y_2 &= r\sin(\varphi+\theta) = r(\sin\varphi\cdot\cos\theta + \cos\varphi\cdot\sin\theta) = (r\sin\varphi)\cos\theta + (r\cos\varphi)\sin\theta \\ &= \underline{x_2\cos\theta + x_1\sin\theta} \end{aligned}$$

Men disse sammenhengene kan vi samle i et matriseprodukt:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\mathbf{A}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

er da en **rotasjonsmatrise** når en vektor roterer en vinkel $\theta$ om origo.

Advarsel: Vår rotasjonsmatrise gjelder når koordinatsystemet står i ro mens vektoren roterer. Vi har også en "rotasjonsmatrise" når vektoren står i ro mens koordinatsystemet roterer. Men å la koordinatsystemet rotere en vinkel $\theta$ mens vektoren er i ro, er ekvivalent med å la vektoren rotere en vinkel $-\theta$ mens koordinatsystemet er i ro. Rotasjonsmatrisen for *rotasjon av koordinatsystemet* blir derfor

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

***Eksempel 6.6*: En vektor**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dreies en vinkel på $30^{\mathrm{o}}$. Hva blir de nye koordinatene til vektoren?

*Løsning*: De nye koordinatene blir

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^0 & -\sin 30^0 \\ \sin 30^0 & \cos 30^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}}} \approx \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2.46 \\ 3.73 \end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 6.2.

## 6.3.5. Bare lineære transformasjoner.

Den oppmerksomme leser vil sikkert ha lagt merke til at skalering, speiling og rotasjon kan utføres med matrisemultiplikasjon. Disse operasjonene er derfor lineære transformasjoner. Men translasjon (flytting) kan ikke utføres med en matrisemultiplikasjon, og er derfor ikke lineær. Nå vil vi veldig gjerne at alle disse operasjonene skal være lineære transformasjoner slik at de kan utføres med matrisemultiplikasjon. Et par gode grunner:

- Mange operasjoner involverer en kombinasjon av de operasjonene vi har sett på hittil. Dersom du skal rotere en vektor om et annet punkt enn origo, må du først flytte vektoren slik at rotasjonspunktet kommer i origo, rotere, og flytte tilbake. Eller hvis du skal speile en vektor om en annen linje enn en koordinatakse, må du først flytte eller dreie slik at speilingslinjen faller sammen med en koordinatakse, speile, og dreie eller flytte tilbake igjen. Dersom alle disse operasjonene kan utføres med matrise-multiplikasjon, kan du multiplisere sammen de transformasjonsmatrisene som inngår til *en* transformasjonsmatrise for hele operasjonen.

- Det er vanlig at samme operasjon skal utføres på mange vektorer, og at alle vektorene er gitt som lineære kombinasjoner av vektorrommets basisvektorer. Da er det tilstrekkelig å transformere disse basisvektorene.

Heldigvis fins det en metode slik at også translasjon blir en lineær transformasjon. Vi må da utvide de vektorene som inngår med en ekstra koordinat, og denne settes konstant lik 1. I et 2-dimensjonalt vektorrom vil derfor vektorer av typen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

framstå som

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da kan vi definere en ***translasjonsmatrise***

$$\mathbf{A}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Når vi nå regner ut $\mathbf{A}_{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}$, får vi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \alpha \\ x_2 + \beta \\ 1 \end{bmatrix},$$

som er den vektoren vi skal ha med tillegg av den 3. ”kunstige” koordinaten med verdien 1. På samme måte kan vi definere utvidede matriser for de andre operasjonene. Vi summerer opp for et 2-dimensjonalt vektorrom:

***Translasjon en strekning*** $\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$:

Translasjonsmatrise $\mathbf{A}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

***Skalering med faktorer $k_1$ og $k_2$***:

Skaleringsmatrise $\mathbf{A}_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

***Speiling:***

om førsteaksen: $\mathbf{A}_{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, om andreaksen: $\mathbf{A}_{\mathrm{Y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

***Rotasjon en vinkel $\theta$ i et fast koordinatsystem***:

Rotasjonsmatrise $\mathbf{A}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

***Eksempel 6.7*:** I et 2-dimensjonalt vektorrom har vi vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bruk de utvidede matrisene ovenfor til å

a) Flytte vektoren en strekning $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Speile vektoren om førsteaksen.

*Løsning*: Den utvidede vektoren blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Translasjonsmatrisen blir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

slik at flyttingen utføres med matrisemultiplikasjonen

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

De nye koordinatene blir altså

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

noe du lett kan kontrollere ved å addere forflytningen til den opprinnelige posisjonen.

b) Speilingsmatrisen om førsteaksen er

$$\mathbf{A}_{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

slik at speilingen utføres med matrisemultiplikasjonen

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

De nye koordinatene blir altså

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

### 6.3.6. Litt datagrafikk.

Vi skal nå se litt på datagrafikk i et plan. I prinsippet går dette ut på at figurer flyttes, dreies, skaleres og roteres. Vi skal for enkelhets skyld anta at figurene er bygd opp av rette linjer, slik at figurene kan defineres ved vektorer til hjørnene. Manipulering av figurene består da i at disse vektorene transformeres slik vi har sett på. Heldigvis er alle transformasjonene lineære.

La oss først se hvordan vi kan bygge opp en transformasjonsmatrise når en operasjon består i at en vektor transformeres *m* ganger etter hverandre. Vi tar da utgangspunkt i en vektor **x** som først skal transformeres med matrisen $\mathbf{A}_1$, deretter med $\mathbf{A}_2$, osv opp til $\mathbf{A}_m$. Disse transformasjonene gir etter tur nye vektorer

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_2 \cdot (\mathbf{A}_1\mathbf{x}) = (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}_3\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_3 \cdot (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{x}) = (\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1)\mathbf{x}$$

osv…

Du ser sikkert at når vi har gjennomført alle vår *m* transformasjoner, er

$$\mathbf{x}_m = (\mathbf{A}_m \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1)\mathbf{x}$$

slik at en transformasjonsmatrise som foretar hele transformasjonen blir

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_m \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 .$$

Legg for all del merke til rekkefølgen av matrisene: Matrisen til den transformasjonen som utføres *først*, står lengst til *høyre*. Matrisen til den *siste* transformasjonen står lengst til *venstre*. Her er det lett å surre med rekkefølgen – og du husker sikkert at vi ikke kan bytte om rekkefølgen når vi multipliserer matriser.

Så skal vi se hvordan vi mest hensiktsmessig kan utføre transformasjonen. Vi antar da at figuren vår er definert ved en rekke punkter A, B, osv med koordinater $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ osv. Vi definerer da utvidede vektorer

$$\mathbf{x}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ osv.}$$

Nå er det gunstig å samle alle disse vektorene i en *punktmatrise*

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_\mathrm{A} \quad \mathbf{x}_\mathrm{B} \quad \cdots].$$

Når hver av vektorene $\mathbf{x}_\mathrm{A}$, $\mathbf{x}_\mathrm{B}$, … transformeres med *samme* transformasjon **M**, får vi nye vektorer som er gitt ved

$$\mathbf{x}_\mathrm{A}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{A},$$

$$\mathbf{x}_\mathrm{B}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{B},$$

… osv.

Vi samler også disse vektorene i en punktmatrise

$$\mathbf{P}' = [\mathbf{x}_\mathrm{A}' \quad \mathbf{x}_\mathrm{B}' \quad \cdots] = [\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{A} \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_\mathrm{B} \quad \cdots] = \mathbf{M} \cdot [\mathbf{x}_\mathrm{A} \quad \mathbf{x}_\mathrm{B} \quad \cdots] = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} .$$

Og dette er faktisk oppskriften på hvordan operasjonen utføres

Når lineære transformasjoner gitt ved matrisene $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, osv opp til $\mathbf{A}_m$ gjennomføres i denne rekkefølgen, får vi en samlet transformasjonsmatrise

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_m \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 .$$

Koordinatene til punkter som transformeres samles i utvidede vektorer $\mathbf{x}_{\mathrm{A}}$, $\mathbf{x}_{\mathrm{B}}$, … osv., som igjen samles i en punktmatrise

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{A}} & \mathbf{x}_{\mathrm{B}} & \cdots \end{bmatrix}.$$

Etter transformasjonen er koordinatene til de transformerte punktene gitt ved utvidede vektorer $\mathbf{x}_{\mathrm{A}}'$, $\mathbf{x}_{\mathrm{B}}'$, … osv. som vi finner som kolonner i matrisen

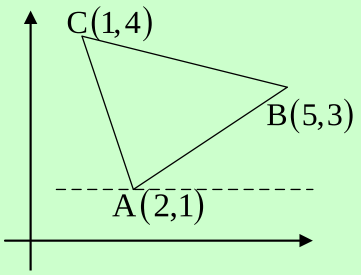
$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{A}}' & \mathbf{x}_{\mathrm{B}}' & \cdots \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} .$$

Nå er det på tide å se hvordan dette fungerer i praksis:

***Eksempel 6.8*:** En trekant har hjørnene $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(5,3)$, $\mathrm{C}(1,4)$. Finn koordinatene til trekantens hjørner etter disse operasjonene:

a) Trekanten speiles om ei rett linje gjennom A parallell med *x*-aksen.
b) Trekanten roterer $120^{\mathrm{o}}$ om hjørnet *A* (fra sin opprinnelige stilling).

*Løsning*:




Vi starter med å samle alle hjørnene i en matrise med utvidede vektorer:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Når vi skal speile om den stiplede linja gjennom A, må vi først flytte trekanten en enhet ned slik at linja faller sammen med *x*-aksen, speile om denne aksen, og flytte en enhet opp igjen. De tre transformasjonsmatrisene blir

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den samlede transformasjonsmatrisen blir

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Da blir

$$\mathbf{P}'=\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&5&1\\1&3&4\\1&1&1\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}2&5&1\\1&-1&-2\\1&1&1\end{bmatrix}}$$

slik at etter speilingen får hjørnene koordinatene

$\underline{\underline{A'(2,1)}}$, $\underline{\underline{B'(5,-1)}}$, $\underline{\underline{C'(1,-2)}}$.

b) Vi skal først utføre en flytting slik at punktet A(2,1) faller i origo. Deretter kommer rotasjonen, og til slutt skal vi flytte tilbake. De tre transformasjonsmatrisene blir

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}\cos120^\circ&-\sin120^\circ&0\\\sin120^\circ&\cos120^\circ&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}&0\\\frac{1}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Den samlede transformasjonsmatrisen blir

$$\mathbf{M}=\mathbf{A}_3\cdot\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}&0\\\frac{1}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}&1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\\\frac{1}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}-\sqrt{3}\\0&0&1\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}&\frac{1}{2}\sqrt{3}+3\\\frac{1}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}-\sqrt{3}\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

Da blir

$$\mathbf{P}'=\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}&\frac{1}{2}\sqrt{3}+3\\\frac{1}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}-\sqrt{3}\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&5&1\\1&3&4\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\underline{\begin{bmatrix}2&\frac{1}{2}-\sqrt{3}&\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\\1&\frac{3}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\\1&1&1\end{bmatrix}}\approx\underline{\begin{bmatrix}2&-1.23&0\\1&2.60&-1.37\\1&1&1\end{bmatrix}}$$

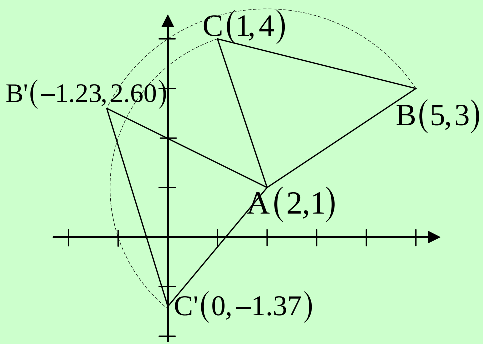
slik at etter rotasjonen om A får hjørnene koordinatene

$\underline{\underline{A'(2,1)}}$,

$\underline{\underline{B'(-1.23, 2.60)}}$,

$\underline{\underline{C'(0,-1.37)}}$.

Situasjonen er illustrert til høyre.



Oppgave 6.3.

## *6.4. Ortogonale transformasjoner.*

Vi har tidligere definert begrepet ***ortogonal matrise***. La oss repetere:

En kvadratisk matrise **A** er *ortogonal*

$\Updownarrow$ def.

Kolonnevektorene i matrisen utgjør et ortonormalt sett.

$\Updownarrow$

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Men vi vet også at $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Siden matrisen **A** kun har *en* invers matrise, har vi at

**A** er ortogonal

$\Updownarrow$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

Dette er en matnyttig setning. Dersom du vet at en matrise er ortogonal, finner du den inverse matrisen rett og slett ved å transponere! Og transponering er jo mye enklere enn å beregne invers matrise.

***Eksempel 6.9*:** Vi har matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a) Vis at matrisen er ortogonal ved å beregne $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$.

b) Beregn $\mathbf{A}^{-1}$, og bruk dette til å vise at matrisen er ortogonal.

*Løsning*:

Ombytting av rekker og kolonner gir direkte at

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Da blir

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} & \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

som viser at **A** er ortogonal.

b) $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T$$

som også viser at **A** er ortogonal.

Da vi beregnet determinanten til **A** i del b) av eksemplet over, fant vi at $\det(\mathbf{A}) = 1$. Dette var ingen tilfeldighet. Vi kan nemlig vise at:

$$\mathbf{A} \text{ er ortogonal } \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \pm 1$$

Merk at implikasjonen går bare en vei. Det fins mange matriser som har determinant med verdi lik $\pm 1$ uten å være ortogonale.

**Bevis:** **A** er ortogonal $\Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T\right) = \det(\mathbf{I}) = 1$.

Men

$$\det\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T\right) = \det(\mathbf{A})\cdot\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \left(\det(\mathbf{A})\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = \pm 1$$

der jeg benytter at $\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \det(\mathbf{A})$.

Du husker sikkert at når **x** og **y** er to vektorer og **A** er en matrise av passe størrelse, så kan

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$$

oppfattes som en *lineær transformasjon* fra ett vektorrom til et annet. Dessuten har vi at:

Dersom **A** er en *ortogonal* matrise, sier vi at transformasjonen

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$$

er **ortogonal**.

Du husker sikkert også at dersom kolonnene i **A** er koeffisientene til basisvektorene i vektorrommet til **y** uttrykt ved basisvektorene i vektorrommet til **x**, kan matriselikningen $\mathbf{y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ brukes til å transformere vektorer mellom disse to vektorrommene. Dermed ser vi direkte at dersom basisvektorene er innbyrdes ortogonale enhetsvektorer, blir transformasjonsmatrisen **A** ortogonal.

Slike ortogonale transformasjoner har en viktig egenskap:

Dersom et sett geometriske vektorer transformeres med en ortogonal transformasjon, vil vektorenes lengder og vinklene mellom vektorene bevares.

**Bevis:** La $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ være to vektorer i et vektorrom. La videre

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1 \qquad \text{og} \qquad \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2$$

være ortogonale transformasjoner av $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ til et annet vektorrom. Da blir

$$\mathbf{y}_1 \bullet \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1^T\cdot\mathbf{y}_2 = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1\right)^T\cdot\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2\right) = \mathbf{x}_1^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T\cdot\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_2$$

der jeg har benyttet at $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Hvis vi setter $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}$ og $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, blir

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y}\bullet\mathbf{y}} = \sqrt{\mathbf{x}\bullet\mathbf{x}} = |\mathbf{x}|$$

som viser at normen (lengden) til en vektor ikke endres.

Videre er

$$\mathbf{y}_1\bullet\mathbf{y}_2 = |\mathbf{y}_1|\cdot|\mathbf{y}_2|\cdot\cos\left(\angle\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\angle\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\right) = \frac{\mathbf{y}_1\bullet\mathbf{y}_2}{|\mathbf{y}_1|\cdot|\mathbf{y}_2|} = \frac{\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1|\cdot|\mathbf{x}_2|} = \cos\left(\angle\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)$$

Altså er vinklene mellom vektorene bevart.

Dette fører til at en figur som transformeres over i et annet koordinatsystem med en ortogonal transformasjon, vil bevare størrelse og form. Figuren kan imidlertid bli speilvendt. Dette skjer dersom $\det\left(\mathbf{A}\right) = -1$.

***Eksempel 6.10*:**

a) Du husker sikkert at *speiling om første- eller andreaksen* utføres med *speilingsmatrisene*

$$\mathbf{A}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}_Y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vis at disse matrisene er ortogonale med determinant lik -1.

b) Du husker sikkert at *rotasjon en vinkel $\theta$* utføres med *rotasjonsmatrisen*

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Vis at denne matrisen er ortogonal med determinant lik 1.

*Løsning*: Velger å vise at $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$ for å vise at matrisene er ortogonale.

a) For matrisen $\mathbf{A}_X$ blir

$$\mathbf{A}_X^T\cdot\mathbf{A}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Videre er

$$\det\left(\mathbf{A}_X\right) = 1\cdot(-1) - 0\cdot 0 = \underline{-1}$$

som bekrefter at transformasjonen bevarer lengder og vinkler, men gir en speiling. For matrisen $\mathbf{A}_Y$ får vi helt tilsvarende regninger og konklusjoner.

b)

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\cdot\sin\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta \\ -\cos\theta\cdot\sin\theta + \cos\theta\cdot\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \cos^2\theta - (-\sin\theta)\cdot\sin\theta = 1$$

som bekrefter at det *ikke* er speiling.

Alle disse transformasjonene vil derfor bevare lengder og vinkler.

[Oppgave 6.4](#).