1. Matriser.

1. 1. Definisjoner og grunnbegreper.

En $m\times n$-**matrise** er en rektangulær "tabell" med *m* horisontale *rader* (rekker, linjer) og *n* vertikale *kolonner* (søyler). Matrisen inneholder da $m\cdot n$ *elementer*. Symbolet for en matrise skrives gjerne med **fet skrift**. For eksempel er

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 2 & a & x \\ 1-a & -3x & 0 \end{bmatrix}$$

en 2×3-matrise med $m=2$ rader og $n=3$ kolonner. Matrisen inneholder da 6 elementer.

Et element i en matrise angis generelt ved indekser som angir rad- og kolonne-nummeret der elementet befinner seg. Et element a_{12} vil således befinne seg i rad 1, kolonne 2 (vi starter alltid numreringen med 1, og angir radnummeret først).

Den generelle skrivemåten for en $m\times n$-matrise er

$$\mathbf{M}_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Du ser at a_{ij} er et generelt symbol for elementet i rekke *i* og kolonne *j*. En mer kompakt skrivemåte for en slik matrise er $\mathbf{M}=\left\{a_{ij}\right\}_{m\times n}$.

En *vektor* er en spesiell matrise som enten inneholder kun *en* rad eller kun *en* kolonne. Den kalles da enten *radvektor* eller *kolonnevektor*. Således blir

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

en radvektor med 3 elementer, mens

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

er en kolonnevektor med 2 elementer.

En generell matrise kan tenkes bygd opp som en radvektor der elementene er kolonne-vektorer, eller som en kolonnevektor der elementene er radvektorer.

Eksempel 1.1: Vis hvordan vi kan oppfatte matrisen

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 2 & a & x \\ 1-a & -3x & 0 \end{bmatrix}$$

a) som en radvektor der elementene er kolonnevektorer.
b) som en kolonnevektor der elementene er radvektorer.

Løsning:

a) Vi kan skrive

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}$$

med kolonnevektorene

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-a \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a \\ -3x \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

som elementer.

b) Vi kan skrive

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$

med radvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & a & x \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-a & -3x & 0 \end{bmatrix}$$

som elementer.

To matriser som har samme antall rader og samme antall kolonner har *samme form*.

1.2. Regneregler for matriser.

1.2.1. Likhet.

To matriser $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ og $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ er *like* hvis og bare hvis begge disse betingelsene er oppfylt:

- Matrisene har samme form.
- $a_{ij} = b_{ij}$ for alle *i* og *j*.

Eksempel 1.2: Sett opp betingelser for at de to matrisene **A** og **B** skal være like:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Løsning: De to matrisene er like hvis og bare hvis

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 4.$$

1.2.2. Multiplikasjon med skalar.

Vi multipliserer en matrise med en skalar (d.v.s. med et vanlig tall) ved å multiplisere hvert element i matrisen med tallet.

Eksempel 1.3: Vi har gitt matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hva blir resultatet når **M** multipliseres med 3?

Løsning:

$$3\mathbf{M} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

Generelt kan vi formulere regelen slik:

> Gitt en matrise $\mathbf{M} = \{a_{ij}\}_{m\times n}$ og en skalar *t*. Da er
> $$t\cdot\mathbf{M} = t\cdot\{a_{ij}\}_{m\times n} = \{t\cdot a_{ij}\}_{m\times n}.$$

1.2.3. Addisjon.

Vi adderer matriser av samme form ved å addere samhørende elementer.

Eksempel 1.4: Gitt matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Beregn $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Løsning:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 0+2 & 1+(-3) \\ 2+0 & -1+3 & 1+(-2) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}.$$

Merk at addisjon kun er definert for matriser som har samme form.

Generelt kan vi formulere regelen slik:

> La $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{m\times n}$ og $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{m\times n}$ være to matriser som har samme form.
> Da er $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \{a_{ij}\}_{m\times n} + \{b_{ij}\}_{m\times n} = \{a_{ij}+b_{ij}\}_{m\times n}$.

Ved å kombinere de to reglene ovenfor, kan vi utføre mer kompliserte addisjoner og multiplikasjoner:

Eksempel 1.5: Gitt matrisene **A** og **B** fra eksemplet foran. Beregn $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Løsning:

$$3\mathbf{A}-\mathbf{B} = 3\cdot\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -10 & -2 & 6 \\ 6 & -6 & 5 \end{bmatrix}}}$$

Med utgangspunkt i reglene ovenfor, kan vi vise at disse generelle regnereglene holder:

La **A, B** og **C** være tre matriser av samme form, mens *s* og *t* er to skalarer.
Da er:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}\\
&(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})\\
&t\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=t\cdot\mathbf{A}+t\cdot\mathbf{B}\\
&(s+t)\mathbf{A}=s\cdot\mathbf{A}+t\cdot\mathbf{A}\\
&(s\cdot t)\mathbf{A}=s\cdot(t\cdot\mathbf{A})
\end{aligned}
$$

Oppgave 1.1.

1.2.4. Multiplikasjon.

Nå blir det verre. Anta at **A** er en $m\times p$ -matrise og at **B** er en $p\times n$ -matrise. Den generelle teknikken for å beregne matriseproduktet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ kan beskrives slik:

Anta at **A** er bygd opp av *m* radvektorer mens **B** er bygd opp av *n* kolonnevektorer:

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}[\cdots & \mathbf{a}_1 & \cdots]\\ & \vdots & \\ [\cdots & \mathbf{a}_i & \cdots]\\ & \vdots & \\ [\cdots & \mathbf{a}_m & \cdots]\end{bmatrix}
\quad \text{og} \quad
\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ \mathbf{b}_1\\ \vdots\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\vdots\\ \mathbf{b}_j\\ \vdots\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\vdots\\ \mathbf{b}_n\\ \vdots\end{bmatrix}\end{bmatrix}.
$$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ blir en ny $m\times n$ -matrise som beregnes med et slikt oppsett:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ \mathbf{b}_1\\ \vdots\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\vdots\\ \mathbf{b}_j\\ \vdots\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}\vdots\\ \mathbf{b}_n\\ \vdots\end{bmatrix}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}[\cdots & \mathbf{a}_1 & \cdots]\\ & \vdots & \\ [\cdots & \mathbf{a}_i & \cdots]\\ & \vdots & \\ [\cdots & \mathbf{a}_m & \cdots]\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a}_i\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_i\mathbf{b}_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_n\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Elementet i posisjon $_{ij}$ i produktmatrisen framkommer som skalarproduktet av $\mathbf{a}_i$ og $\mathbf{b}_j$, d.v.s. som skalarproduktet av de to vektorene som "møtes" i elementets posisjon.

Dette må vi illustrere med et par eksempler:

Eksempel 1.6: Gitt matrisene

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}.$$

Beregn produktet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. (Merk at **A** har like mange kolonner som **B** har rader.)

Løsning: Tenk deg at **A** er bygd opp av to radvektorer, mens **B** er bygd opp av to kolonne-vektorer slik:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\ 3\\ -1\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

Matriseproduktet blir da en ny matrise der elementene er skalarprodukt av de vektorene som bygger opp matrisene **A** og **B**:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\ 3\\ -1\end{bmatrix}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-3\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-2) & -3\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot(-1)\\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot(-2) & 2\cdot 2+(-1)\cdot 3+1\cdot(-1)\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}-5 & -7\\ 0 & 0\end{bmatrix}}}\end{aligned}$$

I eksemplet ovenfor beregnet vi produktet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. La oss nå beregne $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Eksempel 1.7**:** Beregn matriseproduktet $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ der **A** og **B** er de matrisene som ble definert i eksemplet foran.

Løsning: For å beregne $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ bruker vi oppsettet ovenfor, og passer på at **B**-matrisen plasseres til venstre for produkt-matrisen mens **A**-matrisen plasseres over:

$$\begin{array}{cc} & \overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}}\\ \mathbf{B}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 6 & -3 & 3\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}\end{array}$$

Ved å sammenlikne resultatene for $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ og $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, ser du noe viktig:

> Ved matrisemultiplikasjon er $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$!! Dette må du huske!!

Med utgangspunkt i definisjonen på matrisemultiplikasjon kan vi vise at disse regnereglene gjelder:

La **A, B** og **C** være tre matriser som har slik form at de aktuelle operasjonene er definert, mens t er en skalar. Da er:

$$(t\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = t\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$$
$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}$$

Merk:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

Oppgave 1.2.

Ut fra vår definisjon av matriseprodukt, følger også en annen regel:

Vi tenker oss at en matrise **B** er bygd opp av kolonnevektorer slik:
$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]$.
Dersom matrisen **A** har en slik form at matriseproduktet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ er definert, er
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = [\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}_n]$.

Vi kan altså oppfatte matrisen **A** som en slags felles faktor som vi multipliserer alle kolonne-vektorene i **B** med.

1.2.5. Transponering.

Vi *transponerer* en matrise dersom vi lar rader og kolonner bytte plass. Den transponerte av en matrise **M** skrives $\mathbf{M}^{\mathbf{T}}$.

Eksempel 1.8: Hva blir den transponerte av matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & a & x \\ 1-a & -3x & 0 \end{bmatrix}?$$

Løsning: Vi lar rader og kolonner bytte plass, og får

$$\mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1-a \\ a & -3x \\ x & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi kan vise at regnereglene nedenfor gjelder for transponerte matriser:

La **A** og **B** være to matriser som har slik form at de aktuelle operasjonene er definert, mens *t* er en skalar. Da er:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$
$$t\cdot\mathbf{A}^T = (t\cdot\mathbf{A})^T$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T \text{ (merk rekkefølgen av faktorene).}$$

Oppgave 1.3.

1.3. Kvadratiske matriser.

Vi starter med en viktig (og naturlig) definisjon:

En matrise er ***kvadratisk*** hvis og bare hvis den inneholder like mange rader som kolonner.

En kvadratisk matrise ser altså slik ut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left\{a_{ij}\right\}_{n\times n}.$$

Vi har mange viktige begreper som kun kan brukes for kvadratiske matriser:

Hoveddiagonalen til en kvadratisk matrise består av alle elementene på diagonalen fra øvre venstre hjørne til nedre høyre hjørne.
Eller: Hoveddiagonalen består av alle elementene av typen a_{ii} (radnummer lik kolonne-nummer).

I en ***diagonalmatrise*** er alle leddene utenfor hoveddiagonalen lik null.
Eller: $i \neq j \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = 0$.
Elementene langs hoveddiagonalen kan ha vilkårlig verdi (også null). Matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

er således en diagonalmatrise fordi alle elementene utenfor hoveddiagonalen er lik null.

En ***enhetsmatrise*** (også kalt ***identitetsmatrise***) er en diagonalmatrise der alle elementene langs hoveddiagonalen er lik 1.

Eller: $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad i \neq j \\ 1 & \text{når} \quad i = j \end{cases}.$

Vi bruker symbolet **I** for å angi en enhetsmatrise. Vi kan også skrive $\mathbf{I}_n$ for å markere at enhetsmatrisen har n rader og kolonner.

Enhetsmatriser er viktige i matriseregning, bl.a. på grunn av egenskapen nedenfor:

> La **A** være en vilkårlig matrise, mens **I** er en enhetsmatrise som er slik at det aktuelle matriseproduktet er definert. Da er
>
> $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

***Eksempel 1.9*:** Gitt matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Beregn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$ og $\mathbf{I} \cdot \mathbf{A}$ der **I** er passe enhetsmatriser.

Løsning:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Vi sier at en kvadratisk matrise er ***triangulær*** dersom alle elementene enten over eller under hoveddiagonalen er lik null. Mer presist har vi at:

- En matrise er ***øvre triangulær*** dersom alle elementene *under* hoveddiagonalen er lik null.
- En matrise er ***nedre triangulær*** dersom alle elementene *over* hoveddiagonalen er lik null.

Disse definisjonene innebærer at matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

er øvre triangulær fordi alle de tre elementene under hoveddiagonalen er lik null, mens matrisen

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

er nedre triangulær fordi elementet over hoveddiagonalen er lik null.

I noen anvendelser kommer vi bort i ***symmetriske*** matriser. Slike matriser er *symmetriske om hoveddiagonalen*, d.v.s. at $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i og j.

På tilsvarende måte defineres ***skjevsymmetriske*** matriser ved at $a_{ij} = -a_{ji}$ for alle i og j. Merk at i en skjevsymmetrisk matrise må alle elementene langs hoveddiagonalen være lik null.

Som eksempel kan vi ta matrisene **A** og **B** nedenfor:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Her er matrisen **A** symmetrisk, mens matrisen **B** er skjevsymmetrisk.

Av disse definisjonene ser vi at:

- Dersom **A** er en symmetrisk matrise, så er $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
- Dersom **A** er en skjevsymmetrisk matrise, så er $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Fortsett med *determinanter*.