4. Lineære likningssystemer.

4.1. Innledning.

La x_1, x_2, … x_n være n ukjente størrelser. La disse størrelsene være forbundet med m *lineære* likninger, d.v.s. m likninger av formen

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ &\quad \cdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

Da har vi et *lineært likningssystem* med m likninger og n ukjente.

Dette likningssystemet kan skrives på matriseform. Ved å bruke definisjonen på matrise-multiplikasjon ser vi at

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Vi innfører nå *koeffisient-matrisen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

og de to kolonnevektorene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Da kan likningssystemet skrives på formen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Vi får også bruk for *totalmatrisen*

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Den mest generelle metoden til å løse slike likningssystem, er G*auss' eliminasjonsmetode* (også kalt *Gauss/Jordans metode*). Denne metoden er også den beste til å analysere alle de spesialtilfellene som kan opptre når vi løser slike likningssystem.

Det er vanlig at vi har like mange likninger som ukjente, d.v.s. at $m = n$. Da har vi i tillegg til Gauss' metode også to andre metoder:

- Bruk av invers matrise
- Cramers regel.

Begge disse metodene forutsetter imidlertid at $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

4.2. Bruk av invers matrise.

Når vi skal løse et system av lineære likninger med like mange likninger som ukjente, kan vi benytte følgende regel:

> Dersom likningssystemet kan skrives på formen
> $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$
> der **A** er en kvadratisk matrise, har likningssystemet løsningen
> $$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$
> forutsatt at $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Dette vises ved å multiplisere hele likningen *foran* med $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}}}$$

fordi $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ og $\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Merk rekkefølgen: $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, *ikke* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{A}^{-1}$!!

Eksempel 4.1: Bruk metoden med invers matrise til å løse likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x \; - \; 3y \; &= \; 7 \\ x \; + \; y \; &= \; 1 \end{aligned}$$

Løsning: Likningssystemet kan skrives

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nå er

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 - (-3) = 5$$

slik at

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}.$$

Da blir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}.$$

4.3. Cramers regel.

Denne regelen lyder slik:

Dersom likningssystemet kan skrives på formen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der **A** er en kvadratisk matrise der $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, har likningssystemet løsningen

$$x_j = \frac{D_j}{\det(\mathbf{A})}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Her er D_j determinanten til den matrisen som framkommer når kolonne j i **A** erstattes med **b**.

Eksempel 4.2: Bruk Cramers regel til å løse likningssystemet

$$\begin{array}{ccccc} 2x & - & 3y & = & 7 \\ x & + & y & = & 1 \end{array}$$

(jfr. eksempel 2.1).

Løsning: Vi regner ut de determinantene som inngår:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5.$$

$$D_1 = \det\left(\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -(-3) = 10.$$

$$D_2 = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 - 7 = -5.$$

Da blir

$$x = \frac{D_1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{10}{5} = \underline{\underline{2}}.$$

$$y = \frac{D_2}{\det(\mathbf{A})} = \frac{-5}{5} = \underline{\underline{-1}}.$$

Oppgave 4.1.

4.4. Gauss' eliminasjonsmetode.

Fra videregående skole kjenner du sikkert "addisjonsmetoden" for å løse to likninger med to ukjente. Gauss-eliminasjon er en videreføring og systematisering av denne metoden. Målet er å omforme likningssystemet til "trappeform" slik eksemplet nedenfor viser:

Eksempel 4.3: Bruk Gauss-eliminasjon til å løse likningssystemet

$$\begin{array}{llllll} 1) & 2x & +4y & +6z & =18 \\ 2) & 4x & +5y & +6z & =24 \\ 3) & 3x & +y & -2z & =4 \end{array}$$

Løsning: Jeg skal demonstrere teknikken både ved å skrive opp hele likningssystemet i en kolonne til venstre, og ved å ta med bare koeffisientmatrisen og antyde hvilke operasjoner som utføres i en kolonne til høyre.

Jeg starter med å skaffe $1x$ øverst til venstre i likningssystemet. Dette oppnår jeg ved å multiplisere likning 1 med $\frac{1}{2}$. Jeg får da

$$\begin{array}{llllll} 1) & 1x & +2y & +3z & =9 \\ 2) & 4x & +5y & +6z & =24 \\ 3) & 3x & +y & -2z & =4 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Neste trinn går ut på å eliminere x fra likning 2 og 3. Det oppnår jeg ved å multiplisere 1) med –4 og legge til 2), og deretter multiplisere 1) med –3 og legge til 3):

$$\begin{array}{llllll} 1) & 1x & +2y & +3z & =9 \\ 2) & & -3y & -6z & =-12 \\ 3) & & -5y & -11z & =-23 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4)\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Nå skal jeg la likning 1) og første kolonne være i fred. Jeg ønsker å omforme videre slik at jeg får 0 der hvor det nå står $-5y$. Da skaffer jeg meg først $1y$ i raden over ved å dele hele likning 2) med –3. Jeg får:

$$\begin{array}{llllll} 1) & 1x & +2y & +3z & =9 \\ 2) & & +y & +2z & =4 \\ 3) & & -5y & -11z & =-23 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}$$

Nå gjenstår det bare å bli kvitt $-5y$. Da multipliserer jeg likning 2) med 5 og legger til likning 3):

$$\begin{array}{llllll} 1) & 1x & +2y & +3z & =9 \\ 2) & & +y & +2z & =4 \\ 3) & & & -1z & =-3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 5 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Og nå kan vi nøste opp løsningen:

Av likning 3) får vi direkte at $\underline{\underline{z = 3}}$.

Dette settes inn i 2), og vi får $y = 4 - 2z = 4 - 2 \cdot 3 = \underline{\underline{-2}}$.

Helt til slutt får vi av 1) at $x = 9 - 2y - 3z = 9 - 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = \underline{\underline{4}}$.

En oppsummering av teknikken:

- Omform likningssystemet slik at koeffisienten i øvre venstre hjørne blir lik 1, og alle de andre koeffisientene i venstre kolonne blir lik null.
- La den øverste likningen og den venstre kolonnen være i fred. Gå deretter løs på nabokolonnen ved å omforme de resterende likningene på samme måte. Da får du etter hvert et ”trappeformet” likningssystem med bare nuller under ”trappa”.

For å oppnå rett form på likningssystemet, kan du benytte disse operasjonene:

- En likning kan multipliseres med en konstant (ikke null).
- To likninger kan bytte plass.
- To likninger kan legges sammen.

Disse operasjonene kalles gjerne *de elementære rekkeoperasjonene*.

I praksis utfører vi gjerne disse operasjonene kun på koeffisientene i totalmatrisen. Dette gjøres rett og slett for å spare skrivearbeid. Operasjonene minner mye om en av teknikkene til å beregne verdien av determinanter.

I eksemplet ovenfor brakte vi likningssystemet over på ”trappeform” og nøstet deretter opp de ukjente etter tur. Vi kan imidlertid fortsette eliminasjonen ved å skaffe bare nuller også *over* hoveddiagonalen i koeffisientmatrisen som vist nedenfor.

***Eksempel 4.3 forts*.:** Fullfør eliminasjonen slik at du får bare nuller også over hoveddiagonalen.

Løsning: Fra sluttresultatet i eksempel 4.3 multipliserer vi likning 3) med 2 og legger til likning 2). Videre multipliserer vi likning 3) med 3 og legger til likning 1). Vi får:

$$\begin{array}{lllll} 1) & 1x & +2y & & = 0 \\ 2) & & 1y & & = -2 \\ 3) & & & -1z & = -3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Nå gjenstår bare å kvitte seg med $+2y$ fra likning 1). Vi multipliserer da likning 2) med –2 og legger til likning 1). Samtidig skifter vi fortegn på likning 3). Vi får:

$$\begin{array}{lllll} 1) & x & & & = 4 \\ 2) & & y & & = -2 \\ 3) & & & z & = 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot (-2) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi sier at likningssystemet er overført til *redusert trappeform*. Denne formen gir løsningen av likningssystemet direkte.

Oppgave 4.2.

4.5. Noen spesielle situasjoner.

Da vi tok for oss løsing av likningssystem med invers matrise og bruk av Cramers regel, måtte vi forutsette at determinanten til koeffisientmatrisen var forskjellig fra null. Vi skal nå se hva som kan skje dersom denne determinanten har verdien null.

Eksempel 4.4: Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x &+3y &-z &= 5 \\ x &+y &+3z &= 4 \\ 5x &+7y &+z &= 3 \end{aligned}$$

Løsning: Determinanten til koeffisientmatrisen blir

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-20) - 3\cdot(-14) - 1\cdot 2 = \underline{0}.$$

Dette vil si at verken invers matrise eller Cramers regel kan brukes. Vi prøver Gauss-eliminasjon, og skriver bare opp totalmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2)\cdot(-5) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & -14 & -17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

Den nederste raden innebærer imidlertid at

$$0x + 0y + 0z = -11.$$

Men uansett hvilke (endelige) verdier av x, y og z vi velger, så blir venstre side lik null. Likningen er altså aldri oppfylt. Det opprinnelige likningssystemet har derfor ingen løsning.

Men la oss endre litt på likningssystemet. Vi erstatter 3-tallet på høyre side av likhetstegnet i den siste likningen med 14 og ser hva som da skjer:

Eksempel 4.5: Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x &+3y &-z &= 5 \\ x &+y &+3z &= 4 \\ 5x &+7y &+z &= 14 \end{aligned}$$

Løsning: Koeffisientmatrisen er den samme som i eksempel 4.4, og determinanten blir derfor lik null. Vi går i gang med Gauss-eliminasjon, og skriver bare opp totalmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}\begin{matrix} \cdot(-2)\cdot(-5) \\ \hookleftarrow \quad \downarrow \\ \leftarrow \quad \hookleftarrow \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & -14 & -6 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nå innebærer den nederste raden at

$$0x + 0y + 0z = 0\,.$$

Og denne likningen er oppfylt uansett hvilke (endelige) verdier av x, y og z vi velger!

Men dette betyr ikke at vi fritt kan velge verdier for x, y og z. *Alle* likningene må jo være oppfylt. De to første likningene i det reduserte systemet kan oppfattes som

$$x + y + 3z = 4$$

og

$$y - 7z = -3\,.$$

Dette innebærer at:

- Vi kan velge z fritt.
- Etter at z er valgt, blir $y - 7z = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 7z - 3}}\,.$
- Deretter blir $x + y + 3z = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x}} = -y - 3z + 4 = -(7z - 3) - 3z + 4 = \underline{\underline{-10z + 7}}\,.$
-

Det er ikke alltid gunstig å velge z fritt. Noen ganger vil vi velge x fritt eller y fritt, og deretter uttrykke de andre to ukjente ved hjelp av den som vi har valgt fritt.

Vi har altså sett at når determinanten til en kvadratisk koeffisientmatrise er lik null, kan likningssystemet enten ha ingen løsning, eller uendelig mange løsninger.

Oppgave 4.3.

Hittil har vi kun sett på tilfeller der koeffisientmatrisen er kvadratisk, d.v.s. at det er like mange likninger som ukjente. Men det er ikke alltid tilfelle, som eksemplene nedenfor viser.

***Eksempel 4.6*:** Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad &= 6 \\ 2x \quad +y \quad &= 2 \\ x \quad +3y \quad &= -4 \end{aligned}$$

Løsning: Siden koeffisientmatrisen ikke er kvadratisk, kan vi verken bruke teknikken med invers matrise eller Cramers regel. Vi satser på Gauss-eliminasjon, og skriver bare opp totalmatrisen:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -4\end{bmatrix}\begin{array}{ll}\cdot(-2) & \cdot(-1)\\ \;\lrcorner & \;\downarrow\\ \leftarrow & \;\lrcorner\end{array} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & 5 & -10\\ 0 & 5 & -10\end{bmatrix}\begin{array}{ll}\\ \cdot(-1) & \cdot\left(\frac{1}{5}\right)\\ \;\lrcorner & \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Den nederste raden oppfattes som $0x+0y=0$, som alltid er oppfylt for alle (endelige) verdier av x og y. Raden i midten oppfattes som $\underline{\underline{y=-2}}$, mens øverste rad blir

$$x-2y=6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x}} = 2y+6 = 2\cdot(-2)+6 = \underline{\underline{2}}\,.$$

Likningssystemet har altså entydig løsning selv om det er flere likninger enn ukjente.

Men se hva som skjer dersom vi endrer litt på likningssystemet, og erstatter -4 på høyre side av likhetstegnet i den nederste likningen med 4. Da får vi:

***Eksempel 4.7*:** Løs likningssystemet

$$\begin{array}{lll} x & -2y & =6\\ 2x & +y & =2\\ x & +3y & =4\end{array}$$

Løsning: Gauss-eliminasjon gir

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{array}{ll}\cdot(-2) & \cdot(-1)\\ \;\lrcorner & \;\downarrow\\ \leftarrow & \;\lrcorner\end{array} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & 5 & -10\\ 0 & 5 & -2\end{bmatrix}\begin{array}{ll}\\ \cdot(-1) & \cdot\left(\frac{1}{5}\right)\\ \;\lrcorner & \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

Den nederste raden oppfattes som $0x+0y=8$, som aldri er oppfylt for noen (endelige) verdier av x og y. Likningssystemet har altså ingen løsning.

Det er også mulig å konstruere likningssystem som har uendelig mange løsninger selv om det er flere likninger enn ukjente.

Til slutt skal vi se et eksempel der du har flere ukjente enn likninger.

***Eksempel 4.8*:** Løs likningssystemet

$$\begin{array}{llll} x & +2y & -z & =1\\ 3x & +y & +2z & =-2\end{array}$$

Løsning: Jeg benytter kun totalmatrisen:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{array}{l}\cdot(-3)\\ \;\lrcorner\end{array} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 5 & -5\end{bmatrix}.$$

De to radene innebærer at

$$x+2y-z=1$$

og

$$-5y+5z=-5 \quad \Leftrightarrow \quad -y+z=-1.$$

Vi kan nå velge en av de ukjente fritt, slik at likningssystemet får uendelig mange løsninger. Hvis vi velger *z* fritt, blir

$$-y+z=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=z+1}}.$$

Videre blir

$$x+2y-z=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x}}=-2y+z+1=-2(z+1)+z+1=\underline{\underline{-z-1}}.$$

Av disse eksemplene har vi sett at et lineært likningssystem kan ha uendelig mange løsninger, en entydig løsning, eller ingen løsninger. Fins det noen regel for å avgjøre når disse tre situasjonene inntreffer? Det skal vi se i neste avsnitt.

Oppgave 4.4.

4.6. Fundamentalsetningen for lineære likningssystem.

4.6.1. Rangen til en matrise.

Når vi skal drøfte de ulike mulighetene som kan oppstå ved løsing av et lineært likningssystem, trenger vi begrepet ***rang***. Dette Dette begrepet kan defineres på forskjellige måter (som heldigvis viser seg å være ekvivalente). Vi skal definere *rang* slik:

Rangen til en matrise er ordenen til den største kvadratiske undermatrisen som har determinant forskjellig fra null.

Når vi skal bestemme rangen til en matrise, har vi stor nytte av denne setningen:

Rangen til en matrise endres ikke ved elementære rekkeoperasjoner.

Hvis du tenker tilbake på de reglene vi har for beregning av determinanter, vil du se at:

- Ombytting av rader endrer fortegn på determinanten, men kan ikke gi verdien null.
- Multiplikasjon med konstant forskjellig fra null kan ikke gi verdien null.
- Å multiplisere en rad med konstant og legge til en annen rad endrer ikke verdien.

Disse operasjonene kan ikke føre til at en determinant med verdi forskjellig fra null kan bli lik null, eller omvendt. Altså kan ikke rangen til en matrise endres ved disse operasjonene.

***Eksempel 4.9*:** Bestem rangen til matrisene

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\1&1&3\\5&7&1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}2&3&-1&5\\1&1&3&4\\5&7&1&3\end{bmatrix} \quad \text{(jfr. eksempel 4.4).}$$

Løsning: I eksempel 4.4 foretok vi elementære rekkeoperasjoner på $\tilde{\mathbf{A}}$. Av resultatene der får vi at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og at

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at $\mathbf{A}$ har rang 2, fordi $\det(\mathbf{A}) = 0$ (bare nuller i 3. rad i den reduserte matrisen) samtidig som det fins en kvadratisk 2. ordens undermatrise som har verdi forskjellig fra null (stryk for eksempel 1. kolonne og 3. rad i $\mathbf{A}$).

Vi ser også at $\tilde{\mathbf{A}}$ har rang 3 (stryk for eksempel 3. kolonne, og du har en kvadratisk 3. ordens underdeterminant med verdi forskjellig fra null).

Oppgave 4.5.

4.6.2. Fundamentalsetningen.

Nå som rangbegrepet er på plass, og du har regnet deg gjennom en del eksempler og oppgaver med løsing av likningssystem, innser du sikkert at setningen nedenfor virker fornuftig:

Et system av lineære likninger har løsning hvis og bare hvis koeffisientmatrisen og totalmatrisen har samme rang.

Hvis denne felles rangen er lik antall ukjente, har likningssystemet en entydig løsning.

Hvis denne felles rangen er mindre enn antall ukjente, har likningssystemet uendelig mange løsninger.

Vi skal ikke føre noe formelt bevis for denne setningen.

Du anvender denne setningen slik: Løs likningssystemet med Gauss-eliminasjon. I praksis betyr det at du overfører totalmatrisen til trappeform ved hjelp av elementære rekke-operasjoner. Ved å telle opp antall rader som *ikke* inneholder bare nuller (eller alle radene i matrisen dersom ingen rad inneholder bare nuller) finner du rangen. Koeffisientmatrisen er jo den matrisen som framkommer når du stryker siste kolonne i totalmatrisen, så rangen til den får du i samme operasjon.

***Eksempel 4.10*: Bruk setningen ovenfor på likningssystemene i eksempel 4.6 og 4.7.**

Løsning: Likningssystemet i eksempel 4.6 var

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad &= 6 \\ 2x \quad +y \quad &= 2 \\ x \quad +3y \quad &= -4 \end{aligned}$$

Elementære rekkeoperasjoner ga

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Her ser vi at både koeffisientmatrisen og totalmatrisen har rang 2, som er lik antall ukjente. Da har likningssystemet entydig løsning.

Likningssystemet i eksempel 4.7 var

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad &= 6 \\ 2x \quad +y \quad &= 2 \\ x \quad +3y \quad &= 4 \end{aligned}$$

Elementære rekkeopserasjoner ga

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at totalmatrisen har rang 3 mens koeffisientmatrisen har rang 2. Likningssystemet har altså ingen løsning.

4.7. Homogene likningssystem.

Først en definisjon:

Et system av lineære likninger

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

er ***homogent*** dersom $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Du innser vel at setningen nedenfor er nokså innlysende:

Et homogent likningssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ har alltid løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Denne løsningen kalles *den trivielle løsningen*.

Men dersom rangen til **A** er lik antall ukjente, har likningssystemet en entydig løsning. Da kan ikke systemet ha andre løsninger. Herav følger:

Likningssystemet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ har ikke-trivielle løsninger hvis og bare hvis rangen til **A** er mindre enn antall ukjente.

Hvis vi har like mange likninger som ukjente, d.v.s. at **A** er en kvadratisk matrise, blir rangen til **A** mindre enn antall ukjente hvis og bare hvis $\det(\mathbf{A})=0$. Herav følger en setning som vi får mye nytte av etter hvert:

Likningssystemet $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ der **A** er en kvadratisk matrise har ikke-trivielle løsninger hvis og bare hvis $\det(\mathbf{A})=0$.

***Eksempel 4.11*:** Undersøk om t kan ha slike verdier at likningssystemet

$$\begin{array}{llll} x & -y & +t\cdot z & =0 \\ & 3y & -z & =0 \\ 2x & +t\cdot y & +z & =0 \end{array}$$

får ikke-trivielle løsninger.

Løsning: Determinanten til koeffisientmatrisen blir

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & t \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & t & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ t & 1 \end{vmatrix}-0+2\cdot\begin{vmatrix} -1 & t \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1(3+t)-0+2(1-3t)=\underline{5-5t}\,.$$

Likningssystemet har ikke-trivielle løsninger (d.v.s. andre løsninger enn $x=y=z=0$) dersom $5-5t=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{t=1}}$.

La oss se hva som skjer når $t=1$. D blir likningssystemet

$$\begin{array}{lllll} x & -y & +z & =0\cdot(-2) & \\ & 3y & -z & =0 & \downarrow \\ 2x & +y & +z & =0 & \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{lllll} x & -y & +z & =0 & \\ & 3y & -z & =0\cdot(-1) & \\ & 3y & -z & =0 & \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{llll} x & -y & +z & =0 \\ & 3y & -z & =0 \\ 0x & +0y & +0z & =0 \end{array}$$

Den nederste likningen er alltid oppfylt. Vi kan da velge en av de ukjente (for eksempel y) fritt. Deretter blir

$$3y-z=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{z=3y}$$

og

$$x-y+z=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x}=y-z=y-3y=\underline{-2y}\,.$$

Oppgave 4.6.

4.8. Lineære likningssystem med parameter.

I den generelle teorien for løsing av lineære likningssystem har vi sett at et lineært likningssystem kan ha *en* løsning, ingen løsninger eller uendelig mange løsninger. Hvilken situasjon som oppstår, avhenger bl.a. av verdien av koeffisientene i likningssystemet.

Vi skal nå ta for oss likningssystem der ikke alle koeffisientene er faste, kjente tall. En eller flere av koeffisientene avhenger av en ***parameter***. Dette er et tall som vi ikke kjenner verdien til. Vi må derfor være forberedt på at verdien av parameteren avgjør om likningssystemet har *en* løsning, ingen løsninger eller uendelig mange løsninger.

***Eksempel 4.12*:** Vi har gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} -x+t\cdot y&=1\\ t\cdot x-4y&=2 \end{aligned}$$

der x og y er de ukjente mens t er en parameter. Undersøk hvordan løsningen avhenger av t.

Løsning: Fra teorien vet vi at likningssystemet har *en* løsning hvis og bare hvis determinanten til koeffisientmatrisen er forskjellig fra null. Jeg vil derfor starte med å finne de t-verdiene som fører til at likningssystemet *ikke* har entydig løsning. Da er

$$\begin{vmatrix} -1 & t \\ t & -4 \end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4-t^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{t=\pm 2}\,.$$

Dette betyr at når $t\neq\pm 2$ har likningssystemet *en* løsning. Denne løsningen kan vi for eksempel finne med Gauss-eliminasjon:

$$\begin{aligned} -x+t\cdot y&=1 \;\; \cdot t\\ t\cdot x-4y&=2 \;\; \hookleftarrow \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} -x+t\cdot y&=1\\ 0x+t^2y-4y&=t+2 \end{aligned}$$

Den siste likningen kan ordnes til

$$\left(t^2-4\right)y=t+2\,.$$

Siden vi har forutsatt at $t\neq\pm 2$, kan vi dele på t^2-4 og får

$$\left(t^2-4\right)y=t+2 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{t+2}{t^2-4}=\frac{\cancel{t+2}}{\cancel{(t+2)}\,(t-2)}=\underline{\underline{\frac{1}{t-2}}}\,.$$

Av den første likningen får vi

$$-x+t\cdot y=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=t\cdot y-1=t\cdot\frac{1}{t-2}-\frac{t-2}{t-2}=\frac{t-(t-2)}{t-2}=\underline{\underline{\frac{2}{t-2}}}\,.$$

Men hva skjer når $t=\pm 2$? La oss ta de to situasjonene etter tur:

- Dersom $t=2$, blir det opprinnelige likningssystemet

  $$\begin{aligned} -x+2y&=1\\ 2x-4y&=2 \end{aligned}$$

  Vi multipliserer den øverste likningen med 2 og adderer likningene. Da får vi

  $$0x+0y=4$$

  som umulig kan være oppfylt. Likningssystemet har altså ingen løsning når $t=2$.

- Dersom $t=-2$, blir det opprinnelige likningssystemet

  $$\begin{aligned} -x-2y&=1\\ -2x-4y&=2 \end{aligned}$$

  Vi multipliserer den øverste likningen med -2 og adderer likningene. Da får vi

  $$0x+0y=0$$

  som er oppfylt for alle verdier av *x* og *y*. Likningssystemet har altså uendelig mange løsninger når $t=2$. Men når vi har valgt en verdi for *y*, må vi ha at

  $$-x-2y=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x=-2y-1}.$$

Vi sammenfatter:

$t\neq\pm2$: En løsning $x=\dfrac{2}{t-2}$, $y=\dfrac{2}{t-2}$.

$t=2$: Ingen løsning.

$t=-2$: Uendelig mange løsninger. Dersom *y* velges fritt, blir $x=-2y-1$.

Vi angrep problemet med å undersøke determinanten til koeffisientmatrisen. Men vi kan faktisk gå rett løs på Gauss-eliminasjon. La oss se nærmere på det vi allerede har gjort:

$$\begin{aligned} -x+t\cdot y&=1 \quad \cdot t\\ t\cdot x-4y&=2 \ \hookleftarrow \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -x+t\cdot y&=1\\ 0x+t^2y-4y&=t+2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -x+t\cdot y&=1\\ 0x+\left(t^2-4\right)y&=t+2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -x+t\cdot y&=1\\ 0x+(t-2)(t+2)y&=t+2 \end{aligned}$$

Den siste likningen er mest interessant. Vi ser at:

- Dersom $t=-2$, blir denne likningen

  $$0x+0\cdot 4y=0 \quad \Leftrightarrow \quad 0x+0y=0.$$

  Denne likningen er alltid oppfylt, slik at vi får uendelig mange løsninger. Når *y* er fastsatt, blir som før $x=-2y-1$ fra den øverste likningen.

- Dersom $t=2$, blir den nederste likningen i settet

  $$0x+(-4)\cdot 0y=4 \quad \Leftrightarrow \quad 0x+0y=4$$

  som aldri er oppfylt. Da har vi ingen løsning.

- Dersom $t\neq\pm2$, finner vi *x* og *y* uttrykt ved *t* som før.

Denne metoden er raskere enn å gå veien om determinanten til koeffisientmatrisen.

Vi avslutter med et større likningssystem.

***Eksempel 4.13*:** Finn *x*, *y* og *z* av likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & ty & + & z & = & 1\\ tx & - & y & + & tz & = & 1\\ x & + & ty & - & tz & = & -t \end{array}$$

der *t* er en parameter.

Løsning: Vi går i gang med Gauss-eliminasjon:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & ty & + & z & = & 1 \\ tx & - & y & + & tz & = & 1 \\ x & + & ty & - & tz & = & -t \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & ty & + & z & = & 1 \\ 0 & + & \left(t^2-1\right)y & + & 0 & = & 1-t \\ 0 & + & 2ty & - & (t+1)z & = & -(t+1) \end{array}$$

Den midterste likningen kan nå skrives

$$(t+1)(t-1)y = -(t-1)$$

som gir:

- Hvis $\underline{t=-1}$: $0y = 2$, ingen løsning. Da eksisterer det heller ingen løsninger for x og z.
- Hvis $\underline{t=1}$: $0y = 0$, slik at alle reelle verdier av y er løsning. Setter vi deretter inn $t=1$ i den nederste likningen, får vi

  $$2y - 2z = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{z = y+1}}.$$

  Dette (samt $t=1$) settes inn i den øverste likningen, og vi får

  $$x - y + (y+1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}.$$

- Hvis $\underline{t \neq \pm 1}$: Den midterste likningen kan nå deles på t^2-1, og vi får

  $$y = \frac{1-t}{t^2-1} = \frac{-\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t+1)} = \underline{\frac{-1}{t+1}}.$$

  Da gir den siste likningen at

  $$(t+1)z = 2ty + (t+1)$$

  $$\Leftrightarrow \quad z = \frac{2ty}{t+1} + 1 = \frac{2t}{t+1} \cdot \frac{-1}{t+1} + 1 = \frac{-2t}{(t+1)^2} + \frac{t^2+2t+1}{(t+1)^2} = \underline{\underline{\frac{t^2+1}{(t+1)^2}}}.$$

  Den første likningen gir nå at

  $$x = 1 + ty - z = \frac{t^2+2t+1}{(t+1)^2} + t\frac{-1}{t+1} \cdot \frac{t+1}{t+1} - \frac{t^2+1}{(t+1)^2} = \underline{\underline{\frac{-t^2+t}{(t+1)^2}}}$$

En liten oppsummering: Når vi får likningssystem med en parameter, lønner det seg som regel å gå rett løs på Gauss-eliminasjon. Så snart vi får en likning som *kan* gi $0x+0y+0z$ for en eller annen verdi av parameteren, stanser vi opp og undersøker hvilke verdier av parameteren som gir $0x+0y+0z=0$, og hvilke verdier som gir $0x+0y+0z \neq 0$. Dermed finner vi de verdiene av parameteren som gir uendelig mange løsninger, og de verdiene som gir ingen løsninger. Når vi har uendelig mange løsninger, velger vi en av de ukjente fritt og finner hvordan de andre ukjente avhenger av denne. Til slutt finner vi betingelsene for å få *en* løsning, og finner denne uttrykt ved parameteren på vanlig måte.

Oppgave 4.7.

Fortsett med vektorrom.