3. Inverse matriser.

3.1. Innledning.

Den oppmerksomme student vil ha lagt merke til at vi ikke har definert *divisjon* mellom to matriser. Vi skal da heller ikke definere noen slik matrise-divisjon. Vi skal isteden definere ***invers matrise***.

En kvadratisk matrise **A** kan ha en invers matrise som vi betegner med $\mathbf{A}^{-1}$, og som er slik at

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$$

der **I** er enhetsmatrisen av passe orden.

Setningen over reiser umiddelbart to spørsmål:

1. Hvilke kvadratiske matriser har inverse matriser?
2. Hvordan beregnes slike inverse matriser dersom de eksisterer?

Vi skal besvare disse spørsmålene i omvendt rekkefølge, fordi du vil se betingelsene for at $\mathbf{A}^{-1}$ skal eksistere når du vet hvordan du beregner $\mathbf{A}^{-1}$. Dessverre er teknikken for å beregne $\mathbf{A}^{-1}$ nokså innfløkt, og vi skal derfor begynne med å beregne $\mathbf{A}^{-1}$ for en 2×2-matrise.

3.2. Invertering av en 2.ordens kvadratisk matrise.

Vi setter opp regneregelen for invertering av en 2×2-matrise, og viser etterpå at regelen stemmer:

Gitt matrisen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Da er

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Huskeregel:

- Elementene på hoveddiagonalen bytter plass.
- De andre to elementene skifter fortegn.
- Du må dividere med determinanten til **A**.

Vi skal vise at formelen stemmer ved å multiplisere $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$, og vise at vi får enhetsmatrisen. Du kan selv vise at $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$ på samme måte.

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} a_{22}\cdot a_{11}-a_{12}\cdot a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}\cdot a_{12}+a_{11}\cdot a_{22}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} \det(\mathbf{A}) & 0 \\ 0 & \det(\mathbf{A})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$

Husk at

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}\,.$$

Vi merker oss at vi må dividere med $\det(\mathbf{A})$ får å finne $\mathbf{A}^{-1}$. Betingelsen for at $\mathbf{A}^{-1}$ skal eksistere er altså at $\det(\mathbf{A})\neq 0$. Selv om vi hittil bare har vist at dette gjelder for en 2.ordens matrise, skal vi etter hvert vise at denne betingelsen gjelder generelt. Vi har derfor at:

En kvadratisk matrise $\mathbf{A}$ har en invers matrise $\mathbf{A}^{-1}$ hvis og bare hvis
$\det(\mathbf{A})\neq 0$.

Dette har gitt opphav til disse begrepene:

En kvadratisk matrise $\mathbf{A}$ sies å være ***singulær*** dersom $\det(\mathbf{A})=0$.

Matrisen sies å være ***inverterbar*** eller ***ikke-singulær*** dersom $\det(\mathbf{A})\neq 0$.

***Eksempel 3.1*:** Finn (om mulig) $\mathbf{A}^{-1}$ når

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Løsning: Sjekker først at matrisen er inverterbar:

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1-(-2)\cdot 3=\underline{5}\,.$$

Da blir

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}=\underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1\end{bmatrix}}}.$$

Oppgave 3.1.

3.3. Invertering av høyere ordens kvadratiske matriser.

Vi skal nå se hvordan vi kan finne den inverse til større matriser. Det fins flere metoder, men ingen er særlig enkle. I praksis gjøres det med dataverktøy. Men for fullstendighets skyld skal jeg oppgi den formelle metoden. Da trenger vi først en definisjon:

La a_{ij} være et vilkårlig element i en kvadratisk matrise.
La A_{ij} være determinanten til den undermatrisen som framkommer når vi stryker den raden og den kolonnen som a_{ij} står i (vi stryker rad i og kolonne j).
Kofaktoren til a_{ij} defineres som

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} .$$

Merk at faktoren $(-1)^{i+j}$ danner det samme "sjakkbrett-mønsteret" som vi benyttet da vi beregnet determinanter.

Nå kan vi vise at:

Dersom $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, er

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \{C_{ij}\}^T .$$

Her blir $\{C_{ij}\}$ den matrisen som består av *kofaktorene* til elementene i **A**. Denne matrisen kalles naturlig nok *kofaktor-matrisen* til **A**. Merk at kofaktor-matrisen må transponeres når du skal beregne $\mathbf{A}^{-1}$.

Vi bør jobbe oss gjennom et eksempel:

***Eksempel 3.2*:** Beregn $\mathbf{A}^{-1}$ når

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Løsning: Vi starter med å beregne determinanten til **A**, og utvikler den etter 1. rad. Da får vi:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0 = -2\big(-1-(-6)\big) = \underline{\underline{-10}} .$$

Så setter vi i gang:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\cdot\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}0&-2\\1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-2\\3&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&0\\1&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&0\\3&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2\\3&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&0\\0&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&0\\1&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}2&-5&1\\2&0&6\\-4&0&-2\end{bmatrix}^T=\underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-2&-2&4\\5&0&0\\-1&-6&2\end{bmatrix}}}$$

Selv om disse beregningene er omstendelige og vanligvis utføres med dataverktøy, vil jeg anbefale at du sliter deg gjennom en oppgave eller to slik at du lærer deg teknikken.

Oppgave 3.2.

Vi avslutter med et par setninger om inverse matriser:

1) $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

2) Dersom både **A** og **B** er inverterbare, er

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$$

(merk rekkefølgen av faktorene).

Bevis for 1): Vi vet at $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$, og vi ser lett at $\det(\mathbf{I})=1$. Ved å benytte at

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})$$

får vi:

$$\det(\mathbf{A})\cdot\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)=\det\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right)=\det(\mathbf{I})=1 \quad\Leftrightarrow\quad \det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Beviset for 2) krever litt mer fantasi. Vi multipliserer begge sidene av likhetstegnet i setningen med $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ og ser hva som skjer:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{I}.$$

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right)\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\left(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{I}.$$

I den siste linja benyttes at vi kan fjerne parenteser ved multiplikasjon av matriser.

Når vi sammenholder disse to resultatene, ser vi at både $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}$ og $\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ er inverse matriser til $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$. Men det fins ikke to *forskjellige* matriser som begge er inverse til samme matrise. Altså må $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}$ og $\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ være *like*.

Nå er det på tide å se på hva alt dette kan brukes til. Vi starter med *løsing av lineære likningssystemer.*