2. Determinanter.

2.1. Definisjoner og regneregler.

Når vi regner med kvadratiske matriser, dukker det ofte opp et tall som beregnes ut fra elementene i matrisen på en bestemt måte. Dette tallet kalles **determinanten til matrisen**. Dersom vi kaller matrisen **A**, skrives dette tallet gjerne **det(A)** eller $|\mathbf{A}|$.

Framgangsmåten for å beregne determinanten til en generell $n \times n$-matrise er kronglete. Vi skal starte forsiktig med determinanten til en 2×2-matrise.

2.1.1. Andre ordens determinant.

Determinanten til matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

skrives

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

og beregnes slik:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \,.$$

Regelen ovenfor for determinanten til en 2×2-matrise (også kalt en 2. ordens determinant) huskes kanskje lettest ved å tenke ”multiplikasjon i kryss” som vist nedenfor:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

”Pil ned” har positivt fortegn, mens ”pil opp” får negativt fortegn.

Merk:

- Determinanten til en matrise er kun definert for kvadratiske matriser.
- Vi bruker klammeparenteser **[ ]** for å markere en matrise, og absoluttverditegn **| |** for å markere en determinant.
- Vi bruker ordet *determinant* i to betydninger, både om *skrivemåten*

  $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

  og om det *tallet* vi får når vi regner ut

  $$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \,.$$

  Vi burde kanskje betegne *tallet* som ”verdien av en determinant”, men denne presiseringen er ikke vanlig.

Eksempel 2.1: Finn determinanten til

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Løsning:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4(-1) = 6 + 4 = \underline{\underline{10}}.$$

Du vil etter hvert se mange eksempler på at determinant er en nyttig størrelse. Men foreløpig får du nøye deg med å lære regnereglene for determinanter.

Oppgave 2.1.

2.1.2. Determinanter av *n*'te orden.

Regelen for å beregne *n*'te ordens determinanter (determinanter til $n \times n$-matriser) er temmelig kronglete. Vi starter med å definere:

Underdeterminanten til element $\boldsymbol{a_{ij}}$ i en determinant er den determinanten som framkommer når vi stryker hele rad *i* og kolonne *j*.

***Eksempel 2.2*:** Gitt determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Finn underdeterminanten til elementet ”2” i første rad, og til elementet ”7” i tredje rad.

Løsning: Underdeterminanten til elementet ”2” blir

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix},$$

mens underdeterminanten til elementet ”7” blir

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Kall underdeterminanten til elementet a_{ij} for D_{ij}. Da beregnes verdien av en determinant slik:

Velg ut en *vilkårlig* rad eller kolonne. Verdien av determinanten blir da

$$\sum (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot D_{ij}$$

der summen tas over alle elementene i den utvalgte raden eller kolonnen.

Merk at:

- Faktoren $(-1)^{i+j}$ danner et "sjakkbrett-mønster" med + i øvre venstre hjørne, og deretter vekselvis + og – både horisontalt og vertikalt slik:

$$\begin{matrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

- Det er likegyldig *hvilken* rad eller kolonne du tar utgangspunkt i til å beregne determinanten. Det viser seg at resultatet blir det samme uansett. Velg den raden eller kolonnen som ser ut til å gi enklest regninger (som oftest den som har flest nuller).

Påstanden om at det er likegyldig hvilken rad eller kolonne du utvikler determinanten etter, er kronglete å bevise. Men den er svært viktig, og du får bare godta den som den er.

***Eksempel 2.3*:** Beregn verdien av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Løsning: Velger (nokså vilkårlig) å ta utgangspunkt i 1. rad (vi sier at vi *utvikler* determinanten etter 1. rad). Får da:

$$1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(5\cdot 9 - 8\cdot 6) - 2(4\cdot 9 - 7\cdot 6) + 3(4\cdot 8 - 7\cdot 5)$$
$$= 1\cdot(-3) - 2\cdot(-6) + 3\cdot(-3) = \underline{\underline{0}}$$

For å illustrere at verdien blir den samme om vi utvikler determinanten etter en annen rad eller kolonne (og for å få trening i teknikken), kan vi utvikle den etter 2. kolonne. Vi får:

$$-2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2(4\cdot 9 - 7\cdot 6) + 5(1\cdot 9 - 7\cdot 3) - 8(1\cdot 6 - 4\cdot 3)$$
$$= -2\cdot(-6) + 5\cdot(-12) - 8\cdot(-6) = \underline{\underline{0}}$$

Prøv selv å utvikle determinanten etter andre rader eller kolonner!

For å beregne verdien av en 4. ordens determinant, må du velge ut en vilkårlig rad eller kolonne. Når du utvikler determinanten etter denne, får du fire 3.ordens underdeterminanter. Hver av disse beregnes som vist ovenfor. Du innser sikkert at dette kan bli arbeidskrevende. Og med enda større determinanter blir jobben i praksis uoverkommelig. Vi kan da enten overlate jobben til et eller annet dataverktøy, eller vi kan benytte noen av de setningene om determinanter som vi nå skal se på.

Oppgave 2.2.

2.2. Noen setninger om determinanter.

Det kan settes opp mange regler for beregning av determinanter. Mange av dem er kronglete å bevise, og jeg vil derfor nøye meg med å sette dem opp uten bevis. I noen tilfeller vil jeg antyde skisser til bevis.

2.2.1. Determinanten til et matriseprodukt.

Dette er en setning som jeg ikke skal bevise:

La **A** og **B** være to kvadratiske matriser av samme orden. Da er:

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})$$

***Eksempel 2.4*:** Gitt matrisene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vis at setningen over stemmer for disse matrisene.

Løsning: Vi beregner først determinantene til **A** og **B**:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 6\cdot 4 = \underline{-8},$$

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 3\cdot 2 = \underline{2}.$$

Da blir

$$\det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}) = (-8)\cdot 2 = \underline{\underline{-16}}.$$

Så beregner vi $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ og $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, og finner determinantene til disse matriseproduktene:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 36 \\ 30 & 76 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 14 & 36 \\ 30 & 76 \end{vmatrix} = 14\cdot 76 - 30\cdot 36 = \underline{\underline{-16}}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 54 & 76 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 14 & 20 \\ 54 & 76 \end{vmatrix} = 14\cdot 76 - 54\cdot 20 = \underline{\underline{-16}}.$$

2.2.2. Determinanten til transponert matrise.

Siden det er likegyldig om matrisen utvikles etter en rad eller en kolonne, får vi denne setningen:

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}).$$

2.2.3. Ombytting av rader / kolonner.

Så tar vi en setning som vil vise seg å bli nyttig i praktisk bruk:

Dersom to rader eller to kolonner i en determinant bytter plass, vil determinanten skifte fortegn.

Setningen vises enkelt for en 2. ordens determinant:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b .$$

Lar radene bytte plass:

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c \cdot b - a \cdot d = -D .$$

Vi får samme resonnement dersom to kolonner bytter plass.

En 3. ordens determinant kan utvikles etter den raden / kolonnen som *ikke* bytter plass. Etter at de to andre radene / kolonnene har byttet plass, vil alle underdeterminantene som inngår i beregningen ha rader / kolonner som bytter plass og som dermed skifter fortegn. Da vil også verdien av determinanten selv skifte fortegn.

På tilsvarende måte kan en 4. ordens determinant utvikles etter en rad / kolonne som ikke bytter plass. Da vil alle de 3. ordens underdeterminantene som inngår i beregningen skifte fortegn, slik at determinanten selv skifter fortegn.

Slik kan vi fortsette for en vilkårlig determinant av grad n.

2.2.4. Multiplikasjon med konstant.

La oss starte med følgende observasjon:

Dersom alle elementene i en rad / kolonne multipliseres med samme faktor, vil hele determinanten multipliseres med denne faktoren.

Dette vises direkte med en 2.ordens determinant

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b .$$

Dersom alle elementene i en rad (for eksempel 2. rad) multipliseres med t, får vi en ny determinant

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ t \cdot c & t \cdot d \end{vmatrix} = a \cdot td - tc \cdot b = t\left(a \cdot d - c \cdot b\right) = t \cdot D .$$

Vi får samme resultat dersom en annen rad eller kolonne multipliseres med *t*.

Med større determinanter får du tilsvarende resultat ved å utvikle determinanten etter den raden / kolonnen der elementene multipliseres med faktoren.

Vi kan også formulere setningen slik:

Dersom alle elementene i en rad / kolonne har en felles faktor, kan denne faktoren settes utenfor determinanten.

Hva skjer med determinanten til en matrise dersom *matrisen* multipliseres med et tall *t*? Du husker sikkert at når en *matrise* multipliseres med et tall, så multipliseres *alle* elementene i matrisen med tallet. For en $n \times n$-matrise vil det si at det er *n* rader / kolonner som inneholder en felles faktor. Determinanten multipliseres da med t^n slik setningen nedenfor angir:

Når $\mathbf{A}$ er en $n \times n$-matrise, er

$$\det(t \cdot \mathbf{A}) = t^n \cdot \det(\mathbf{A}) \ .$$

***Eksempel 2.5*:** Vi har gitt matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Beregn $\det(\mathbf{A})$ og $\det(3\mathbf{A})$ både ved å bruke setningen ovenfor og ved å regne ut 3**A** først.

Løsning: $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 = \underline{-4}$.

Da er

$$\det(3\mathbf{A}) = 3^2 \cdot (-4) = \underline{\underline{-36}}.$$

Eller:

$$3\mathbf{A} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

slik at

$$\det(3\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 24 \end{vmatrix} = 6 \cdot 24 - 15 \cdot 12 = \underline{\underline{-36}}.$$

2.2.5. Rad / kolonne med bare nuller.

Her kommer en ny setning som du vil få mye glede av i praktisk regning:

Dersom en rad / kolonne i en determinant inneholder bare nuller, har determinanten verdien null.

Dette er egentlig innlysende når du utvikler determinanten etter den raden / kolonnen som kun inneholder nuller.

2.2.6. Proporsjonale rader / kolonner.

Her kommer en fiks setning:

Dersom to rader / kolonner i en determinant er proporsjonale, har determinanten verdien null.

For en 2. ordens determinant er beviset rett fram:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ t\cdot a & t\cdot b \end{vmatrix} = a\cdot tb - ta\cdot b = \underline{\underline{0}}\,.$$

En 3. ordens determinant med to proporsjonale rader / kolonner kan alltid utvikles slik at alle underdeterminantene er 2. ordens determinanter med proporsjonale rader / kolonner. Alle disse blir lik null, slik at hele determinanten får verdien null.

En 4. ordens determinant med to proporsjonale rader / kolonner kan alltid utvikles slik at alle underdeterminantene er 3. ordens determinanter med proporsjonale rader / kolonner. Alle disse blir lik null, slik at hele determinanten får verdien null.

Og slik fortsetter vi for determinanter av stadig høyere orden.

Setningen kan også bevises ved et fikst lite resonnement: Sett først proporsjonalitetsfaktoren utenfor determinanten slik at determinanten inneholder *like* rader / kolonner. Dersom disse byttes om, vil determinanten skifte fortegn. Men en ombytting av to *like* rader / kolonner kan umulig føre til at determinanten endrer verdi. Den eneste verdien som ikke endres ved et fortegnsskift er verdien *null*.

Eksempel 2.6: Vi har gitt matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hvorfor kan du si at $\det(\mathbf{A}) = 0$ uten først å regne ut denne determinanten?

Løsning: Vi ser direkte at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot(-3) & (-2)\cdot 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

slik at 1. og 2. rad er proporsjonale. Da er determinanten til matrisen lik null.

2.2.7. Determinanten til en triangulær matrise.

Denne setningen må du merke deg:

Dersom en matrise er triangulær, er verdien av matrisens determinant lik produktet av alle leddene i hoveddiagonalen.

Denne setningen stemmer åpenbart for en 2. ordens determinant.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \cdot d - 0 \cdot b = \underline{\underline{a \cdot d}}\,.$$

For en 3. ordens determinant får vi:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + 0 + 0 = \underline{\underline{x \cdot a \cdot d}}\,.$$

Her har vi utviklet determinanten etter 1. kolonne.

For en 4. ordens triangulær determinant resonnerer vi på samme måten: Når vi utvikler den etter 1. kolonne, vil bare første element med sin tilhørende underdeterminant gi bidrag. Til sammen blir dette produktet av leddene i hoveddiagonalen.

Og slik fortsetter vi for en determinant av vilkårlig orden.

Tilsynelatende er dette en lite nyttig setning. Slike triangulære determinanter må da være ganske sjeldne? Men setningen nedenfor skaffer oss slike triangulære determinanter.

2.2.8. Omforming til triangulær determinant.

Vi slår til med denne setningen:

Verdien av en determinant endrer ikke verdi dersom alle elementene i en rad / kolonne multipliseres med samme tall, og produktene legges til en annen rad / kolonne.

Dette vises rett fram for en 2. ordens determinant:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b \,.$$

Vi multipliserer 1. rad med *t* og legger produktene til 2. rad. Vi får:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c + t \cdot a & d + t \cdot b \end{vmatrix} &= a \cdot \left(d + t \cdot b \right) - \left(c + t \cdot a \right) \cdot b = a \cdot d + t \cdot a \cdot b - c \cdot b - t \cdot a \cdot b \\ &= \underline{\underline{a \cdot d - c \cdot b}} \end{aligned}$$

Vi ser at determinanten ikke endrer verdi.

Så ser vi på en 3. ordens determinant. Vi multipliserer en rad / kolonne med *t* og legger produktene til en annen rad / kolonne. Så utvikler vi determinanten etter den raden / kolonnen som *ikke* er berørt av disse operasjonene. Da får vi 3 underdeterminanter av 2. orden, der alle gjennomgår de operasjonene som vi har sett ovenfor. De endrer altså ikke verdi. Dermed endrer heller ikke vår 3. ordens determinant verdi.

Slik kan vi fortsette med en 4. ordens determinant, en 5. ordens determinant, osv.

Denne setningen benytter vi til å omforme en vilkårlig determinant til en triangulær determinant. Verdien av denne beregnes så med setning 2.7. Teknikken er illustrert nedenfor.

***Eksempel 2.7*:** Beregn verdien av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} .$$

Løsning: Vi starter med å multiplisere 1. rad med –4 og legger til 2. rad. Videre multipliserer vi 1. rad med –7 og legger til 3. rad. Disse operasjonene endrer ikke determinantens verdi.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4) & \cdot(-7) \\ \lrcorner & \downarrow \\ \leftarrow & \lrcorner \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4 & 5-8 & 6-12 \\ 7-7 & 8-14 & 10-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \lrcorner \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6+6 & -11+12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 1 = \underline{\underline{-3}} \end{aligned}$$

Du ser at poenget er å multiplisere en rad med et slikt tall at når produktene legges til en annen rad, får du en ny null under hoveddiagonalen. Systemet går ut på at vi først skaffer oss nuller under hoveddiagonalen i 1. kolonne, deretter i 2. kolonne osv.

I eksemplet ovenfor var vi heldige som startet med 1 i øvre venstre hjørne av determinanten. Vi tar et eksempel til der vi ikke er så heldige.

Eksempel 2.8: Beregn verdien av determinanten

$$\begin{vmatrix}2&4&-2&0\\3&0&1&-2\\0&4&1&-2\\-1&3&0&2\end{vmatrix}.$$

Løsning: Vi starter med å sette 2 som felles faktor i 1. rad utenfor determinanten. Deretter skaffer vi oss nuller under hoveddiagonalen i 1. kolonne, og fortsetter med 2. og 3. kolonne:

$$\begin{vmatrix}2&4&-2&0\\3&0&1&-2\\0&4&1&-2\\-1&3&0&2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\3&0&1&-2\\0&4&1&-2\\-1&3&0&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot(-3)&\cdot 1\\ \hookleftarrow&\downarrow\\ &\downarrow\\ \leftarrow&\hookleftarrow\end{matrix} = 2\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&-6&4&-2\\0&4&1&-2\\0&5&-1&2\end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-6)\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&4&1&-2\\0&5&-1&2\end{vmatrix}\begin{matrix} & \\ \cdot(-4)&\cdot(-5)\\ \hookleftarrow&\downarrow\\ \leftarrow&\hookleftarrow\end{matrix} = -12\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{11}{3}&-\frac{10}{3}\\0&0&\frac{7}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}$$

$$= (-12)\cdot\tfrac{11}{3}\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{10}{11}\\0&0&\frac{7}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\\ \hookleftarrow\end{matrix} = -44\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{10}{11}\\0&0&0&\frac{27}{11}\end{vmatrix}$$

$$= (-44)\cdot\frac{27}{11} = \underline{\underline{-108}}$$

I praksis er det gjerne lettere å stanse omformingen når du er kommet fram til en 2. ordens determinant. I vårt eksempel får vi da:

$$-12\begin{vmatrix}1&2&-1&0\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{11}{3}&-\frac{10}{3}\\0&0&\frac{7}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix} = (-12)\cdot 1\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}\frac{11}{3}&-\frac{10}{3}\\ \frac{7}{3}&\frac{1}{3}\end{vmatrix} = -12\left(\frac{11}{9}+\frac{70}{9}\right) = -12\cdot\frac{81}{9} = \underline{\underline{-108}}.$$

Generelt kan vi skaffe et 1-tall i ønsket posisjon enten ved å bytte om rader eller kolonner slik at vi henter et 1-tall til denne posisjonen (husk å skifte fortegn på determinanten!), eller ved å sette en faktor utenfor determinanten.

`Oppgave 2.3`.

Nå er du klar til å gå løs på *inverse matriser*.