Mengdelære.

1. Grunnleggende definisjoner

En ***mengde*** er en veldefinert samling av objekter.
Hvert objekt kalles et ***element*** i mengden.

I prinsippet kan slike mengder inneholde alle tenkelige elementer (tall, hus, mennesker …). Vi skal stort sett konsentrere oss om mengder som inneholder matematiske objekter (tall og tallsymboler).

Vi bruker gjerne store bokstaver i kursiv til å betegne mengder (for eksempel *A*, *M*), mens små bokstaver i kursiv betegner elementer i mengden (for eksempel *a*, *x*, *y*).

Dersom et element *x* er med i en mengde *A*, skriver vi $x \in A$.
Dersom et element *x* *ikke* er med i en mengde *A*, skriver vi $x \notin A$.

Vi kan angi mengder på to måter. Det enkleste er å ramse opp de elementene som inngår i mengden. Vi sier at mengden gis på ***listeform***. De elementene som inngår i mengden, skrives da vanligvis mellom to klammeparenteser: $\{\ \}$.

Eksempel 1.1: Angi at en mengde *A* inneholder alle hele tall fra og med 1 til og med 5.

Løsning: Vi skriver

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Noen ganger inneholder mengden så mange elementer at det ikke er hensiktsmessig, eller ikke mulig, å ramse opp alle elementene. Da ramser vi noen av elementene på en slik måte at det er ”innlysende” hvilke andre elementer som inngår.

Eksempel 1.2: Angi at en mengde *B* inneholder alle hele tall fra og med 1 til og med 100.

Løsning: Dette kan skrives på flere måter, for eksempel slik:

$$B = \{1, 2, 3, \cdots, 99, 100\}.$$

En noenlunde oppvakt leser vil skjønne hvilke elementer som inngår.

Eksempel 1.3: Angi at en mengde *C* inneholder alle hele tall fra og med 10 og oppover uten noen øvre grense.

Løsning: Dette kan skrives på flere måter for eksempel slik:

$$C = \{10, 11, 12, \cdots\}.$$

Også her er det temmelig innlysende hva som menes.

Noen mengder brukes så ofte at de har fått egne symboler og egne navn:

$\mathbb{N}$: Dette er mengden av ***naturlige tall***.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

Merk at tallet 0 ikke inngår i $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$: Dette er mengden av ***hele tall***.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

$\mathbb{Q}$: Dette er mengden av ***rasjonale tall***, som er alle tall som kan skrives på brøkform der teller er et helt tall og nevner er et naturlig tall.

$\mathbb{R}$: Dette er mengden av ***reelle tall***, som er alle tallene på tall-linja. Vi kan nemlig vise at det eksisterer tall som ikke kan skrives som rasjonale tall.

Senere skal vi utvide tallbegrepet til å omfatte mengden av ***komplekse tall*** som skrives $\mathbb{C}$.

Dersom vi har mer kompliserte mengder, angir vi hvilke elementer som inngår ved hjelp av en ***mengdebygger***. Denne ser i utgangspunktet slik ut:

$$A = \{x \mid p(x)\}.$$

Dette leses: ”Mengden *A* inneholder alle elementer *x* som er slik at utsagnet $p(x)$ er sant”.

Eksempel 1.4: Bruk mengdebygger til å angi mengden $\mathbb{Q}$.

Løsning: Dette kan gjøres på flere måter. En litt uformell skrivemåte kan være:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{t}{n}, t \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dette leses: ”Mengden $\mathbb{Q}$ inneholder alle elementer *x* som er av formen $x = \frac{t}{n}$, der *t* er et helt tall og *n* er et helt tall”.

Du vil sikkert se at skrivemåten ikke helt stemmer med reglene for matematisk logikk. Vi *kan* uttrykke oss mer formelt korrekt. Men i dette kurset skal vi koste noen formalismer under teppet og nøye oss med enklere skrivemåter.

Eksempel 1.5: Bruk mengdebygger til å angi mengden av alle hele, positive tall som er delelige med 7.

Løsning: Denne mengden kan (litt uformelt) skrives

$$M = \{x \mid x = 7t, t \in \mathbb{N}\}.$$

Eksempel 1.6: Bruk mengdebygger til å angi mengden av alle hele, positive tall under 100 som er delelig med 3.

Løsning: Denne mengden kan (litt uformelt) skrives

$$M = \{x < 100 \mid x = 3t, t \in \mathbb{N}\}.$$

Også andre (mer formelt korrekte) skrivemåter kan brukes.

En annen mengde som ofte forekommer, er den ***tomme mengden***:

Den tomme mengden har fått symbolet $\varnothing$.
Denne mengden inneholder ingen elementer.

Oppgave 1.1.

2. Sammensatte mengder.

Vi får ofte behov for å sette sammen mengder. Vi skal nå se hvordan det kan gjøres.

I de fleste situasjoner er det en begrenset gruppe elementer som kan inngå i våre mengder. Denne samlingen elementer kalles ***grunnmengden*** for den aktuelle situasjonen. Vi betegner gjerne grunnmengden med *G* eller *U* (*U*nivers).

Du *må* kjenne definisjonene nedenfor:

La *A* være en mengde innenfor en grunnmengde *U*.
Komplementmengden til *A* skrives A^C eller $\overline{A}$ og inneholder aller elementer som er med i grunnmengden men som *ikke* er med i *A*.

Med symboler:

$$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

La A og B være to mengder som inngår i samme grunnmengde U. Da definerer vi:

Unionen mellom A og B skrives $A \cup B$, og består av alle elementer som er med *enten* i A *eller* i B *eller* i begge.
Med symboler:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Snittet mellom A og B skrives $A \cap B$, og består av alle elementer som er med *både* i A *og* i B.
Med symboler:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Differansen mellom A og B skrives $A - B$ eller $A \setminus B$, og består av alle elementer i A som *ikke* er med i B.
Med symboler:

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Eksempel 2.1: Vi har gitt grunnmengden

$$U = \{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\},$$

og mengdene

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$$

og

$$B = \{2, 5, 8, 9, 10\}.$$

Hva blir A^C, B^C, $A \cup B$, $A \cap B$ og $A - B$?

Løsning:

$$A^C = \{4, 6, 8, 9\}, \quad B^C = \{1, 3, 4, 6, 7\}.$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}.$$

$$A \cap B = \{2, 5, 10\}.$$

$$A - B = \{1, 3, 7\}.$$

Vi trenger et par definisjoner til:

Vi sier at ***A* er en *delmengde* av *B*** og skriver $A \subseteq B$ dersom alle elementer i A også er elementer i B.
Med symboler:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)].$$

Neste definisjon er nokså naturlig:

Vi sier at **to mengder *A* og *B* er *like*** og skriver $A = B$ dersom de inneholder de samme elementene.
Med symboler:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \left[(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)\right]$$

eller

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \left[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)\right].$$

Slik vi har definert delmengde, er *A* en delmengde av *B* også når $A = B$. Da er også *B* en delmengde av *A*. Vi trenger imidlertid også begrepet ***ekte delmengde***:

Vi sier at ***A* er en *ekte delmengde* av *B*** og skriver $A \subset B$ dersom *A* er en delmengde av *B* samtidig som det fins elementer i *B* som *ikke* er med i *A*.
Med symboler:

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

Nå gjenstår det bare en definisjon til:

Vi sier at to mengder *A* og *B* er ***disjunkte*** dersom de ikke har noen felles elementer.

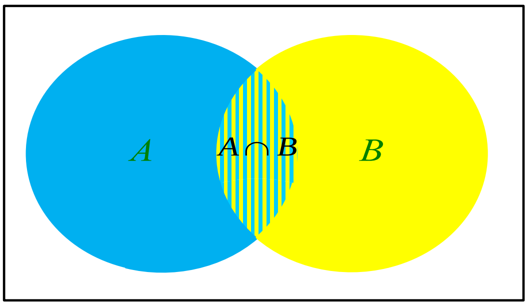
Vi har ikke noe eget symbol som angir at to mengder er disjunkte. Men vi kan definere begrepet symbolsk slik:

A og *B* er disjunkte $\quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \varnothing$.

Oppgave 2.1.

3. Venn-diagram.

Venn-diagram er nyttige til å illustrere definisjonene ovenfor, og når vi skal jobbe med mengde-operasjoner. Et Venn-diagram består vanligvis av et rektangel som angir grunn-mengden, og sirkler eller ellipser som angir de mengdene som inngår. Dersom mengdene ikke er disjunkte, må sirklene overlappe.

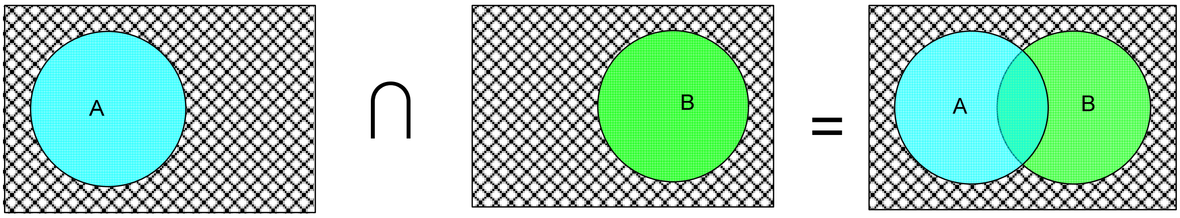


Til venstre ser du et Venn-diagram for to mengder *A* og *B*.

- $A \cap B$ blir det skraverte området.
- $A \cup B$ blir alt som er fargelagt.
- $A - B$ blir den delen av *A* som *ikke* er skravert.

Slike Venn-diagram er nyttige til å illustrere sammenhenger mellom mengder. De er også nyttige når vi skal bevise regneregler. Nedenfor ser du hvordan vi kan vise at

$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C .$$



Her er A^C alt som ligger utenfor *A*, d.v.s. det som er skravert. På tilsvarende måte er B^C alt som er utenfor *B*. Snittet av disse to mengdene blir da alt som er skravert på *begge* de to figurene til venstre ovenfor. På figuren til høyre ovenfor ser vi at dette er det samme som området utenfor $A \cup B$. Da har vi vist at $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$.

Denne regelen er en av de to ***deMorgans lover for mengder***. Disse lovene ser slik ut:

deMorgans lover for mengder:
La *A* og *B* være to mengder. Da er:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C .$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C .$$

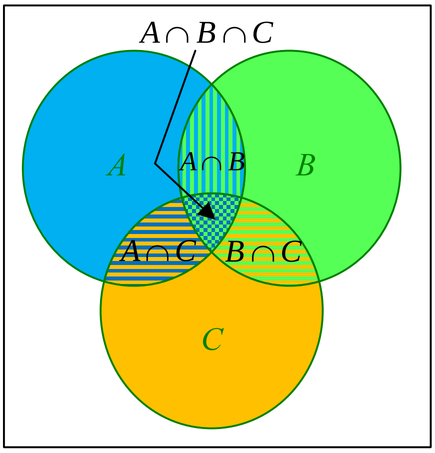
Lovene er enklere å huske dersom vi bruker skrivemåten $\overline{A}$ istedenfor A^C for å betegne en komplementmengde. Med denne skrivemåten blir regelen ovenfor:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} .$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} .$$

Huskeregel: Bryt komplementerings-streken, og skift $\cap / \cup$ -tegn.

deMorgans lover inngår i samlingen av regneregler for mengdealgebra.

Oppgave 3.1.



Dersom vi har tre mengder, er det viktig å tegne Venn-diagrammet slik at alle kombinasjoner av mengder kommer med. Til venstre ser du hvordan vi tegner et Venn-diagram for de tre mengdene *A*, *B* og *C*.

Legg merke til hvordan de sammensatte mengdene $A \cap B$, $A \cap C$ og $B \cap C$ framkommer. Merk at "trekanten" $A \cap B \cap C$ i midten er med i alle disse tre snitt-mengdene!

4. Antall elementer i mengder.

I mange praktiske situasjoner er det viktig å bestemme hvor mange elementer det er i sammensatte mengder. Vi skal da bruke skrivemåten $n(A)$ for å angi antall elementer i mengden *A* (noen lærebøker bruker n_A). Da har vi denne grunnregelen:

La $n(M)$ stå for antall elementer i mengden *M*.
Dersom *A* og *B* er to mengder med samme grunnmengde, har vi at:

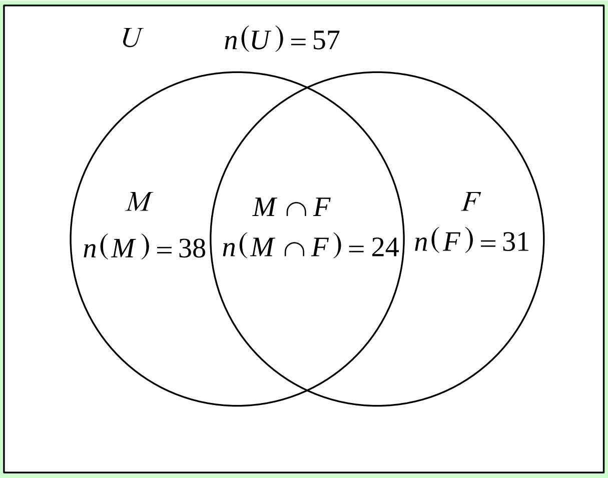
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Regelen vises ved hjelp av et Venn-diagram: Når du summerer antall elementer i *A* og antall elementer i *B*, vil du telle elementene i $A \cap B$ to ganger. For å finne antall elementer i $A \cup B$, må du trekke antall elementer i $A \cap B$ fra summen av antall elementer i *A* og antall elementer i *B*.

Eksempel 4.1: Ved en høgskole var det 57 studenter som gikk opp til eksamen i både matematikk og fysikk. Da sensurlistene forelå, var det 38 studenter som hadde stått i matematikk, og 31 som hadde stått i fysikk. Av disse hadde 24 stått i begge fagene. Hvor mange studenter hadde strøket i begge fagene?

Løsning: La *U* være mengden av studenter som gikk opp til eksamen i begge fagene. Da er $n(U) = 57$. La *M* og *F* være mengden av studenter som sto i henholdsvis matematikk og fysikk. Da er $n(M) = 38$ og $n(F) = 31$. Vi innser at $M \cup F$ er mengden av studenter som har stått i minst ett av fagene, mens $M \cap F$ er mengden av studenter som har stått i begge.

Situasjonen kan illustreres i et Venn-diagram slik:



Telleregelen i ramma ovenfor gir at

$$\begin{aligned} n(M \cup F) &= n(M) + n(F) - n(M \cap F) \\ &= 38 + 31 - 24 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Det er altså 45 studenter som har stått i minst ett av fagene. Da er det

$$57 - 45 = \underline{\underline{12}}$$

studenter som har strøket i begge fagene.

Dersom vi har tre mengder *A*, *B* og *C*, blir telleregelen mer komplisert:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) \\ -n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ +n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Regelen kan vises med Venn-diagram, eller vi kan bruke *mengdealgebra*.

Hva kan vi bruke mengdelære til? Vi kan raskt ramse opp flere bruksområder:

- Mengdelæra gir oss en terminologi og et sett symboler som viser seg å være svært nyttig i mange sammenhenger.
- Vi bruker mengde-begrep når vi går nærmere inn på hva som egentlig skjer når vi løser likninger eller system av likninger.
- Mengdelære er uunnværlig innenfor sannsynlighetsregning.

Du vil derfor stadig komme tilbake til begrep fra mengdelæra, selv om mengdelæra i utgangspunktet ikke virker særlig nyttig for en ingeniør.

Oppgave 4.1.