Litt matematisk logikk.

1. Utsagn.

La oss starte med en viktig definisjon:

Et **utsagn** er en formulering som er enten **sann** eller **usann**.

Merk at formuleringen må være så presis at det er mulig å avgjøre med sikkerhet om påstanden er sann eller usann.

Dersom utsagnet er **sant**, har det **sannhetsverdi** T (**T**rue) eller 1.
Dersom utsagnet er **usant**, har det **sannhetsverdi** F (**F**alse) eller 0.

Eksempel 1.1: Er formuleringene nedenfor utsagn? Dersom de er utsagn, skal du avgjøre sannhetsverdien.
a) "Oslo er hovedstaden i Norge".
b) "Det er varmt i dag".
c) "Matematikk er morsomt".
d) "2 + 2 = 5"

Løsning:
a) Dette er et utsagn. Sannhetsverdi **T** eller **1**.
b) Ikke utsagn. Sannhetsverdien avhenger av den subjektive vurderingen til den som framsetter påstanden.
c) Ikke utsagn, av samme grunn som ovenfor.
d) Utsagn, med sannhetsverdi **F** eller **0**.

Vi bruker ofte bokstavsymboler (gjerne i *kursiv*) for å angi utsagn, f. eks. slik:
p: ”Rosenborg ble seriemester i fotball for menn i 2003”.

Nå kan vi bruke symbolet p istedenfor det lange utsagnet ”Rosenborg ble seriemester i fotball for menn i 2003”. Slike symboler kalles **utsagnsvariabler**.

I matematikken kommer vi ofte over formuleringer av typen "$x > 2$". Sannhetsverdien av slike utsagn avhenger av verdien av x. I det øyeblikk x er kjent, kan vi også avgjøre om utsagnet er sant eller ikke. Slike utsagn kaller vi **åpne utsagn.**

Et **åpent utsagn** er et utsagn der sannhetsverdien først kan avgjøres etter at en eller flere variabler har fått tilordnet verdi(er).

Løs Oppg. 1.1.

Når vi bruker en utsagnsvariabel til å angi et åpent utsagn, setter vi ofte den eller de ukjente variablene i parentes slik:

$p(x)$: ” $x > 2$ ”. Sannhetsverdien av utsagnet p kan avgjøres når vi kjenner verdien av x.
$q(x,y)$: ” $x \leq y$ ”. Sannhetsverdien av utsagnet q kan avgjøres når vi kjenner verdiene av x og y.

Vi skal etter hvert se at likninger, likningssystemer og ulikheter egentlig er åpne utsagn. Når vi løser en likning, en ulikhet eller et likningssystem, går vi på jakt etter verdier av den eller de ukjente som gjør utsagnet sant. Vi skal snart komme nærmere inn på dette, men vi må ta med oss noen flere definisjoner først.

2. Negasjon, konjunksjon og disjunksjon.

Negasjonen til *p* er et utsagn som har motsatt sannhetsverdi av p.
Vi bruker symbolet $\overline{p}$ (eller $\neg p$) for negasjonen til p.
$\overline{p}$ leses "ikke p", og betyr at ”p er ikke sant”.

Sammenhenger mellom sannhetsverdier til utsagn illustreres gjerne i **sannhetsverditabeller.** Sannhetsverditabellen til p og $\overline{p}$ blir slik:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

Denne sannhetsverdien leses slik:
Når p er usann, er $\overline{p}$ sann.
Når p er sann, er $\overline{p}$ usann.

Løs Oppg. 2.1.

Vi får ofte bruk for å kombinere enkle utsagn til mer kompliserte utsagn. Da får vi bruk for definisjonene nedenfor:

La p og q være to utsagn. Da gjelder:

Konjunksjonen $p \wedge q$ leses "p og q", og er et sammensatt utsagn som er sant hvis og bare hvis *både p og q* er sanne.

Disjunksjonen $p \vee q$ leses "p eller q", og er et sammensatt utsagn som er sant hvis og bare hvis *enten p eller q eller begge* er sanne.

Legg merke til at $p \vee q$ er sant når *enten p eller q eller begge* er sanne. Men noen ganger har vi bruk for et symbol som angir at *enten p eller q*, men *ikke* begge, er sanne. Da kan vi bruke "eksklusiv eller":

> $p \veebar q$ kalles *eksklusiv eller* (engelsk: XOR), og er et utsagn som er sant hvis og bare hvis *enten p eller q, men ikke begge* er sanne.

Sannhetsverditabellene for $p \wedge q$, $p \vee q$ og $p \veebar q$ blir slik:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

***Eksempel 2.1*:** Vi har disse utsagnene:

p: "Jeg står til eksamen i matematikk".
q: "Jeg står til eksamen i fysikk".

Formuler med ord disse sammensatte utsagnene:

$p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $\overline{p \wedge q}$, $\overline{p} \vee \overline{q}$.

Løsning:

$p \wedge q$: "Jeg står til eksamen i både matematikk og fysikk".
$p \vee q$: "Jeg står til eksamen i enten matematikk eller fysikk eller begge".
$p \veebar q$: "Jeg står til eksamen i enten matematikk eller fysikk, men ikke i begge."
$\overline{p \wedge q}$: "Jeg står ikke til eksamen i både matematikk og fysikk".
$\overline{p} \vee \overline{q}$: "Jeg står ikke til eksamen i matematikk, eller jeg står ikke til eksamen i fysikk, eller begge deler".

Sammenlikner vi de to siste utsagnene, ser vi at de egentlig gir uttrykk for det samme. Slike utsagn med samme sannhetsverdi er **ekvivalente**.

Løs `Oppg. 2.2` og `2.3`.

3. Implikasjon og ekvivalens.

Vi får ofte bruk for disse viktige sammenhengene mellom utsagn:

La p og q være to utsagn.

$p \Rightarrow q$ betyr at når p er sann, er også q sann.
Det leses "p **impliserer** q" eller "hvis p så q".

$p \Leftrightarrow q$ betyr det samme som $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
Det leses "p er **ekvivalent** med q" eller "p hvis og bare hvis q".

Vi bruker også symbolet $\equiv$ for ekvivalens.

Vi har allerede nevnt at likninger, likningssystemer og ulikheter egentlig er åpne utsagn. Når vi løser slike problem, omformer vi det opprinnelige utsagnet til enklere utsagn. Da bør vi være nøye med å benytte ekvivalenssymbolet $\Updownarrow$ (eller $\Leftrightarrow$). Dette innebærer at alle verdier av den eller de ukjente som gjør at utsagnet på en side av ekvivalenssymbolet er sant, også fører til at utsagnet på den andre siden blir sant. I praksis slurver vi dessverre ofte med ekvivalens-symbolene når vi foretar slike utregninger, eller vi sløyfer ekvivalenssymbolene helt for å forenkle skrivingen. Men da er det fort gjort å gjøre feil, noe neste eksempel viser:

Eksempel 3.1: Påvis feilene i disse "ekvivalensene":

a) $n = 2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 4$

b) $x^2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

Løsning:

a) Vi definerer de to utsagnene $p(n)$: $n = 2$ og $q(n)$: $n^2 = 4$. Vi ser at hvis $p(n)$ er sant slik at $n = 2$, får vi ved kvadrering at $n^2 = 4$ slik at også $q(n)$ er sant. Men når $q(n)$ er sant slik at $n^2 = 4$, kan vi også ha at $n = -2$ slik at $p(n)$ ikke er sant. Altså må ekvivalenssymbolet byttes ut med en implikasjon slik:

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 4.$$

b) Vi definerer de to utsagnene $p(x)$: $x^2 = 3x$ og $q(x)$: $x = 3$. Vi ser at hvis $q(x)$ er sant slik at $x = 3$, blir også $p(x)$ sant fordi $x^2 = 3^2 = 9$ og $3x = 3 \cdot 3 = 9$. Men se hva som skjer dersom $x = 0$. Da blir $p(x)$ sant fordi $x^2 = 0^2 = 0$ og $3x = 3 \cdot 0 = 0$ mens $q(x)$ åpenbart ikke er sant. Vi må på ny erstatte implikasjonen med ekvivalens, og setter:

$$x^2 = 3x \quad \Leftarrow \quad x = 3.$$

Dersom vi er litt sløve, kan vi få mange "morsomme" resultater, noe "beviset" nedenfor er et eksempel på.

Eksempel 3.2: Finn feilen i "beviset" nedenfor:

Vi starter med å sette

$$a = 2.$$

Så multipliserer vi med a på begge sider:

$$a^2 = 2a.$$

Trekker fra 4 på begge sider:

$$a^2 - 4 = 2a - 4.$$

Bruker kvadratsetning på venstre side, og faktoriserer ut 2 på høyre side:

$$(a-2)(a+2) = 2(a-2).$$

Deler med $(a-2)$ ***på begge sider, og får:***

$$a + 2 = 2.$$

Men siden vi startet med at $a = 2$***, har vi ved innsetting at***

$$2 + 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{4 = 2}}.$$

Løsning: Her har vi gjort flere formelle feil. Men den feilen som fører til katastrofen, er at vi deler med $(a-2)$. For når vi startet med å sette $a = 2$, blir $a - 2 = 2 - 2 = 0$. Og som du sikkert vet, kan vi ikke dele et tall med null.

4. Beslektet stoff.

De små smakebitene på matematisk logikk som er tatt opp i dette notatet, omhandler kun en liten flik av dette fagfeltet. I vårt pensum skal vi imidlertid begrense oss til bare disse småbitene. Du kan finne litt mer om sammensatte utsagn og *logisk algebra* med bl.a. to viktige lover som kalles *deMorgans lover* i et eget lite tilleggsnotat.

Hva kan vi bruke matematisk logikk og logisk algebra til? I første rekke skal vi bruke den til å føre *matematiske bevis* på en korrekt måte. Noen slike bevisteknikker er samlet i et eget lite notat.

Innen elektronikk er det et fagfelt som omhandler *logiske kretser*. Dette er kretser som bl.a. brukes til å slå brytere av og på avhengig av om visse betingelser er oppfylt. Slike logiske kretser benytter i praksis logisk algebra for å avgjøre om bryterne skal slås på aller av. Du kan få en liten forsmak i et lite notat.

Mikroprosessoren som er "hjernen" i enhver datamaskin, er i prinsippet en svært komplisert logisk krets. Når du programmerer en datamaskin, benytter du et eller annet *programmerings-språk* som igjen baserer seg på logisk algebra.

Vi skal også se litt på *mengdelære*, som er en gren av matematikken som du bl.a. vil dra nytte av innen statistikk og sannsynlighetsregning. Regnereglene for mengder kan baseres på tilsvarende regler fra logisk algebra.

Løsing av likninger og likningssystemer baserer seg i grunnen på matematisk logikk kombinert med mengdelære.