Løsing av likninger.

La oss først slå fast at:

- En likning eller et system av likninger er egentlig et åpent utsagn.
- Å løse en likning eller et system av likninger går ut på å finne den eller de verdiene av den eller de ukjente som gjør utsagnet sant.
- Samlingen av slike verdier kalles *løsningsmengden*.

Eksempel 1: Formuler disse likningene og likningssystemene som åpne utsagn:

a) $2x-1=3(x+2)$

b) $3x-y=4$
$x+2y=-1$

c) $x^2-4x=0$

d) $x^2-xy=0$
$2x+y=3$

Løsning: Benytter p som utsagnsvariabel i alle oppgavene.

a) $p(x):\ 2x-1=3(x+2)$.

b) $p(x,y):\ 3x-y=4 \quad \wedge \quad x+2y=-1$.

c) $p(x):\ x^2-4x=0$.

d) $p(x,y):\ x^2-xy=0 \quad \wedge \quad 2x+y=3$

Hva er det egentlig vi gjør når vi løser en likning:

Vi løser en likning ved å omforme utsagnet til et *ekvivalent* utsagn som er så enkelt at vi direkte ser hvilke verdier av den eller de ukjente som gjør utsagnet sant.

Merk at vi hele tiden må omforme til *ekvivalente* utsagn. Da kan vi benytte at:

Dersom to åpne utsagn p og q er ekvivalente, har utsagnene samme løsningsmengde.

Væpnet med denne kunnskapen går vi i gang med å løse likningene og likningssystemene i eksempel 1:

Eksempel 2: Løs likningene og likningssystemene i Eksempel 1.

Løsning:

a) $p(x): 2x-1=3(x+2)$

$\Updownarrow$ Multipliserer ut parentesen

$2x-1=3x+6$

$\Updownarrow$ Legger til like mye på begge sider av likhetstegnet

$2x-1-3x+1=3x+6-3x+1$

$\Updownarrow$ Trekker sammen

$-x=7$

$\Updownarrow$ Multipliserer med -1 på begge sider av likhetstegnet

$q(x): x=-7$

Vi har vært nøye med å sikre oss at vi hele tiden har ekvivalenser. Vi ser direkte at løsningsmengden til $q(x)$ er $L_{\mathrm{q}}=\{-7\}$. Da er også $L_p=\underline{\underline{\{-7\}}}$.

b) $p(x,y): 3x-y=4 \quad \wedge \quad x+2y=-1$

$\Updownarrow$ Multipliserer utsagnet til venstre med 2

$6x-2y=8 \quad \wedge \quad x+2y=-1$

$\Updownarrow$ Legger til like mye på begge sider av likhetstegnet i utsagnene

$6x-2y+x+2y=8-1 \quad \wedge \quad x+2y-x=-1-x$

$\Updownarrow$ Trekker sammen

$7x=7 \quad \wedge \quad 2y=-1-x$

$\Updownarrow$ Deler venstre likning på 7, og setter inn i høyre likning

$x=1 \quad \wedge \quad 2y=-1-1=-2$

$\Updownarrow$ Deler høyre likning på 2

$q(x,y):\ x=1 \quad \wedge \quad y=-1$

Siden vi hele veien har ekvivalenser, blir $L_{\mathrm{p}}=L_{\mathrm{q}}=\underline{\underline{\{(1,-1)\}}}$.

Legg merke til at vi har kun *en* løsning, som består av tall*paret* $x=1 \quad \wedge \quad y=-1$.

c) $p(x):\ x^2 - 4x = 0$

$\Updownarrow$ Faktoriserer ut x

$(x-4)x = 0$

$\Updownarrow$ Når et produkt er lik null, må en av faktorene være lik null

$x - 4 = 0 \quad \vee \quad x = 0$

$\Updownarrow$ Legger til like mye på begge sider av venstre likning

$x - 4 + 4 = 0 + 4 \quad \vee \quad x = 0$

$\Updownarrow$ Trekker sammen

$q(x):\ x = 4 \quad \vee \quad x = 0$

Siden vi hele veien har ekvivalenser, blir $L_p = L_q = \underline{\underline{\{0,4\}}}$.

d) $p(x,y):\ x^2 - xy = 0 \quad \wedge \quad 2x + y = 3$

$\Updownarrow$ Faktoriserer ut x i utsagnet til venstre

$x(x-y) = 0 \quad \wedge \quad 2x + y = 3$

$\Updownarrow$ Når et produkt er lik null, er en av faktorene lik null

$(x = 0 \vee x = y) \quad \wedge \quad 2x + y = 3$

$\Updownarrow$ Bruker en regel fra logisk algebra

$(x = 0 \wedge 2x + y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge 2x + y = 3)$

$\Updownarrow$ Erstatter x med henholdsvis 0 og y

$(x = 0 \wedge 2 \cdot 0 + y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge 2y + y = 3)$

$\Updownarrow$ Trekker sammen

$(x = 0 \wedge y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge 3y = 3)$

$\Updownarrow$ Ordner

$q(x,y):\ (x = 0 \wedge y = 3) \quad \vee \quad (x = y \wedge y = 1)$

Siden vi hele veien har ekvivalenser, blir $L_p = L_q = \underline{\underline{\{(0,3),(1,1)\}}}$.

Vi får altså to løsninger, som hver inneholder et tallpar.

I disse eksemplene har vi vært pinlig nøye med å føre løsningene slik at vi er sikre på at vi har ekvivalenser hele veien. I praksis gjør vi det mindre formelt. Vi benytter da regneteknikker som sikrer at vi har ekvivalenser, selv om vi ikke sier det uttrykkelig hver gang. Et eksempel på en slik regneteknikk er at når vi har en likning, flytter vi ofte ledd over på andre siden av likhetstegnet med motsatt fortegn. Det vi egentlig gjør, er at vi trekker fra eller legger til like mye på begge sider av likhetstegnet.

Hva skjer dersom vi et eller annet sted i våre omforminger har en *implikasjon* istedenfor en ekvivalens? Da må vi benytte regelen nedenfor:

La L_p og L_q være løsningsmengdene til de to åpne utsagnene *p* og *q*. Da gjelder:
Dersom $p \Rightarrow q$, så er $L_p \subseteq L_q$.

Dette betyr at L_q kan inneholde elementer som *ikke* er med i L_p, d.v.s. at vi kan få "falske" løsninger.

Noen ganger benytter vi omforminger som fører til at $p \Leftarrow q$. Dette betyr at $L_p \supseteq L_q$, slik at vi risikerer å miste løsninger.

Eksempel 3: Hva er galt med disse forsøkene på å løse en likning?

a) Vi løser likningen

$$p(x): x^2 - 3x = 0$$

slik:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \overset{\text{forkorter}}{\Leftrightarrow} \quad x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

b) Vi løser likningen

$$p(x): \sqrt{x+2} = x$$

slik:

$$\sqrt{x+2} = x \quad \overset{\text{kvadrerer}}{\Leftrightarrow} \quad x + 2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{formel}} \quad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{2} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{-2}{2} = -1$$

Løsning:

a) Vi kan ikke uten videre forkorte bort en faktor som inneholder en ukjent størrelse, fordi vi da risikerer å dividere på null. Korrekt løsning er altså

$$x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0 \vee x = 3}}.$$

Slik regningen er utført i eksemplet, ville det vært formelt korrekt å sette

$$x^2 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-3) = 0 \quad \Leftarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Dersom vi nå definerer $q(x): x = 3$, vil implikasjonen midt inne i utregningen fører til at $L_q \subseteq L_p$, noe vi ser stemmer.

b) Vi har ikke ekvivalens når vi kvadrerer. Vi burde ført løsningen slik:

$$\sqrt{x+2} = x \quad \Rightarrow \quad x + 2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \ \text{ osv}\ldots$$

Hvis vi definerer

$$q(x): x^2 - x - 2 = 0$$

blir $L_p \subseteq L_q$. Og dette stemmer, fordi $L_q = \{-1, 2\}$ mens $L_p = \{2\}$. Ved innsetting ser du at når du setter inn $x = -1$ i $p(x)$ får du feil fortegn (prøv!).