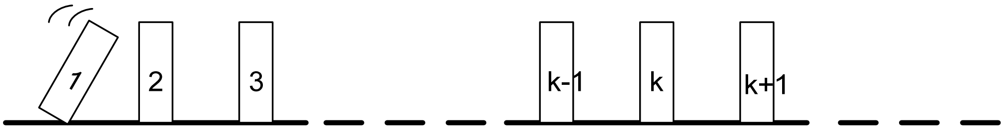
Induksjonsbevis.

En dag du ikke har noe bedre å gjøre, stiller du opp noen domino-brikker slik at dersom en brikke velter, så tar den med seg neste brikke i fallet. Dette gjelder uansett hvilken brikke som velter. Hvis du nå velter den første brikken, vil alle de andre brikkene også velte etter tur. Logisk, ikke sant?



Dette lille eksperimentet illustrerer et viktig matmatisk prinsipp som kalles ***induksjons-prinsippet***. Vi skal bruke det til å føre ***induksjonsbevis***. Det kan formuleres slik:

Induksjonsbeviset:
Gitt et åpent utsagn $U(n)$, der n er et helt tall større enn eller lik en verdi n_0.
Vi kan vise at $U(n)$ er sann for alle $n \geq n_0$ slik:
1) Vis at $U(n_0)$ er sann. Dette kalles *induksjonsgrunnlaget*.
2) Vis at dersom $U(k)$ er sann, må også $U(k+1)$ være sann.
   Eller: $U(k) \quad \Rightarrow \quad U(k+1)$.
   Dette kalles *induksjonstrinnet*.

Da må $U(n)$ være sann for alle $n \geq n_0$.

Hva har nå denne formuleringen med domino-brikkene å gjøre? La oss formulere domino-eksperimentet matematisk:
$U(n)$: Domino-brikke nr. n velter.

Sett $n_0 = 1$. Induksjonsgrunnlaget blir da $U(1)$, d.v.s. at den første domino-brikken i rekka velter. Videre har du stilt opp brikkene slik at dersom brikke nr. k velter, så velter også nabo-brikken, d.v.s. at brikke nr. $k+1$ velter. Eller: $U(k) \quad \Rightarrow \quad U(k+1)$. Dette fører til at brikke nr. 1 river med seg brikke nr. 2, som river med seg brikke nr. 3, som … som river med seg brikke nr. k, som river med seg brikke nr $k+1$, som osv… Dermed velter alle brikkene etter tur.

Nå er tiden inne til å bruke dette prinsippet til et matematisk bevis:

Eksempel 1: Bruk induksjon til å vise at:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Løsning: Vi formulerer dette som et åpent utsagn:

$$U(n):\quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ \text{ for alle } n\in\mathbb{N}.$$

Vi starter med å etablere induksjonsgrunnlaget. Vi setter inn $n=1$ i utsagnet, og får

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

som er et sant utsagn.

Deretter sjekker vi induksjonstrinnet. Vi setter $n=k$ og får

$$U(k):\qquad 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Så setter vi $n=k+1$ og får

$$U(k+1):1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Nå skal vi *anta* at $U(k)$ er sant, og undersøke om dette fører til at også $U(k+1)$ er sant. Vi merker oss først at venstre side i $U(k+1)$ kan skrives

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1).$$

Så *forutsetter* vi at $U(k)$ er sant. Venstre side av $U(k+1)$ kan da omformes slik:

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+k}_{=\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)\overset{1)}{=}\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\overset{2)}{=}\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\overset{3)}{=}\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Forklaring til overgangene:

1) Siden vi forutsetter at $U(k)$ er sant, kan vi erstatte $1+2+3+\cdots+k$ med $\frac{k(k+1)}{2}$.
2) Setter opp på felles brøkstrek.
3) Setter $(k+1)$ utenfor parentes.

Nå har vi vist at *dersom* $U(k)$ er sant, så er også $U(k+1)$ sant. Vi vet at $U(1)$ er sant. Da må også $U(2)$ være sant, slik at $U(3)$ må være sant, og $U(4)$ må være sant, osv… Utsagnet må være sant for alle $n\in\mathbb{N}$.

Du bør merke deg at denne metoden kun kan brukes til å *vise* at en formel stemmer. Metoden kan ikke brukes til å *utlede* en formel. For å kunne bruke metoden, må du altså først *anta* at vi har en eller annen sammenheng, og deretter bruke induksjon til å undersøke om sammenhengen alltid stemmer. Eksemplet nedenfor viser en slik situasjon.

Eksempel 2: En dag du sitter og leker med kalkulatoren din, oppdager du noe påfallende:

$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

Dessuten er det jo opplagt at $1=1^2$. Det ser ut til å være et system:

Summen av de n første positive oddetallene er lik n^2.

Du har allerede påvist at regelen gjelder for $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ og 5. Men dermed er det ikke sikkert at regelen gjelder generelt. Bruk induksjon til å påvise at denne regelen stemmer for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning: Først må vi formulere påstanden vår mer matematisk. Vi legger først merke til at oddetall nr. *n* har verdien $2n-1$ (bare sjekk med tallene ovenfor. Påstanden kan forresten bevises med et eget lite induksjonsbevis, der vi starter med at første oddetall er 1, og at det er avstand 2 mellom hvert oddetall). Vår påstand kan da formuleres som dette utsagnet:

$$U(n): \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Vi har allerede påvist at utsagnet er sant for $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ og 5, slik at induksjonsgrunnlaget er grundig etablert. Så går vi i gang med induksjonstrinnet.

Vi setter først $n = k$, og får

$$U(k):\ 1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2.$$

Så setter vi $n = k+1$, og får

$$U(k+1):\ 1+3+5+\cdots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2.$$

Vi *antar* at utsagnet stemmer for en vilkårlig positiv verdi $n = k$. Da kan venstre side av $U(k+1)$ omformes slik:

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{=k^2}+(2(k+1)-1) \overset{1)}{=} k^2+(2(k+1)-1) \overset{2)}{=} k^2+2k+2-1$$

$$\overset{3)}{=} k^2+2k+1 \overset{4)}{=} (k+1)^2$$

Forklaring til overgangene:

1) Siden vi forutsetter at $U(k)$ er sant, kan vi erstatte $1+3+5+\cdots+(2k-1)$ med k^2.
2) Ganger ut parentesen.
3) Trekker sammen.
4) Bruker kvadratsetning.

Dette viser at *dersom* $U(k)$ er sant, så er også $U(k+1)$ sant. Vi har allerede påvist at utsagnet er sant for $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ og 5. Da er også $U(6)$ sant, og $U(7)$ er sant, og $U(8)$ er sant, osv… Utsagnet må være sant for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppg. 1.

Så tar vi et eksempel der det er viktig å "oversette" den påstanden som skal bevises til matematisk språkdrakt.

Eksempel 3: Bruk induksjon til å vise at $4^n - 1$ er delelig med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

Løsning: Vi starter med å sette inn noen verdier for *n* slik at vi ser hva påstanden egentlig går ut på. Samtidig etableres induksjonsgrunnlaget.

$n=1$: $4^1-1=4-1=3=3\cdot 1$.

$n=2$: $4^2-1=16-1=15=3\cdot 5$.

$n=3$: $4^3-1=64-1=63=3\cdot 21$.

$n=4$: $4^4-1=256-1=255=3\cdot 85$.

Vi ser at påstanden stemmer for $n=1,\ 2,\ 3$ og 4. Vi ser også at når et positivt tall er delelig med 3, må tallet kunne skrives som $3\cdot t$ der $t\in\mathbb{N}$. Nå er vi klar til å formulere vår påstand matematisk:

$U(n)$: For alle $n\in\mathbb{N}$ eksisterer et tall $t\in\mathbb{N}$ slik at $4^n-1=3\cdot t$.

Induksjonsgrunnlaget er allerede etablert. Vi går i gang med induksjonstrinnet.

$U(k)$: $4^k-1=3\cdot t_1$ der $t_1\in\mathbb{N}$.

$U(k+1)$: $4^{k+1}-1=3\cdot t_2$ der $t_2\in\mathbb{N}$.

Vi *antar* at $U(k)$ er sant. Så går vi i gang med å omforme venstre side i $U(k+1)$:

$$4^{k+1}-1\overset{(1)}{=}4^k\cdot 4^1-1\overset{(2)}{=}(3\cdot t_1+1)\cdot 4-1\overset{(3)}{=}12\cdot t_1+4-1\overset{(4)}{=}12t_1+3\overset{(5)}{=}3(4t_1+1)\overset{(6)}{=}3\cdot t_2.$$

Forklaring til overgangene:

1: Bruker potens-regneregel: $4^{k+1}=4^k\cdot 4^1$.

2: Forutsetter at $U(k)$ er sant. Da gjelder $4^k-1=3\cdot t_1 \quad\Leftrightarrow\quad 4^k=3\cdot t_1+1$.

3: Ganger ut parentesen.

4: Trekker sammen.

5: Setter 3 som felles faktor utenfor parentes.

6: Setter $t_2=4t_1+1$. Siden $t_1\in\mathbb{N}$, må også $t_2\in\mathbb{N}$.

Vi har altså vist at dersom $U(k)$ er sant, må også $U(k+1)$ være sant. Og siden påstanden stemmer for $n=1$, må den også stemme for alle andre verdier av $n\in\mathbb{N}$.

Oppg. 2.

Hittil har vi bare vist at formler stemmer. Men vi kan også bruke induksjonsbevis til å vise at ulikheter stemmer, noe neste eksempel viser.

Eksempel 4: Vis at:

Hvis $x>-1$, så er $(1+x)^n\ge 1+nx$ for alle $n\in\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$.

Løsning: Vi starter med å formulere påstanden som et utsagn:

$U(n)$: Hvis $x>-1$, blir $(1+x)^n\ge 1+nx$ for alle $n\in\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$.

Så må vi etablere induksjonsgrunnlaget. Vi setter $n=2$, og utsagnet blir:

$U(2)$: $(1+x)^2=1+2x+x^2\ge 1+2x$ som er sant fordi $x^2\ge 0$ for alle x.

Til slutt kommer induksjonstrinnet. For oversiktens skyld sløyfer vi betingelsene $x > -1$ og $n \in \{2, 3, 4, \cdots\}$ når vi setter opp utsagnene:

$U(k)$: $(1+x)^k \geq 1+kx$.

$U(k+1)$: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.

Vi omformer venstre side av $U(k+1)$, og forutsetter at $U(k)$ er sant:

$$(1+x)^{k+1} \overset{(1)}{=} (1+x)^k (1+x) \overset{(2)}{\geq} (1+kx)(1+x) \overset{(3)}{=} 1+x+kx+kx^2 \overset{(4)}{\geq} 1+x+kx \overset{(5)}{=} 1+(k+1)x$$

Forklaring til overgangene:

1: Bruker potens-regneregel.

2: Forutsetter at $U(k)$ er sant. Da er $(1+x)^k \geq 1+kx$. Dessuten har vi forutsatt at $x > -1$, slik at $1+x$ er et positivt tall. Ulikheten $(1+x)^k \geq 1+kx$ er fremdeles oppfylt etter at vi har multiplisert begge sider med det positive tallet $1+x$.

3: Multipliserer ut parentesene.

4: Denne ulikheten må gjelde fordi $kx^2 \geq 0$.

5: Setter felles faktor x utenfor parentes.

Siden induksjonsgrunnlaget er sant, og induksjonstrinnet også er sant, har vi bevist påstanden.

Oppg. 3.