5. Transferfunksjoner.

5.1. Hva er en transferfunksjon?

Nå har du sett hvordan Laplace-transformen kan brukes til å løse differensiallikninger. Men i praktisk ingeniør-arbeid er løsing av differensiallikninger kun innledningen til et svært viktig arbeidsfelt: Studiet av hvordan ulike fysiske systemer vil oppføre seg. Det viser seg nemlig at de fleste fysiske systemer og prosesser som en ingeniør kommer i kontakt med, kan beskrives med differensiallikninger. Slike systemer kalles ***dynamiske systemer***. Dersom differensial-likningene har konstante koeffisienter, har vi ***lineære dynamiske systemer***.

Alle systemer utsettes for ytre påvirkninger. Noen av dem kan vi kontrollere. De kalles ofte ***pådrag***, og brukes gjerne til å styre prosessen. Andre påvirkninger er uønskede ***forstyrrelser***. Alle slike ytre påvirkninger fører til at systemets ***tilstandsvariabler*** endrer verdi.

Vi skal kun se på helt enkle systemer som har *ett* pådrag og *en* tilstandsvariabel. Slike enkle systemer kalles ***monovariable***.

For en ingeniør er det viktig å vite hvordan systemets tilstand endres når pådraget endres. Her er det at ***transferfunksjonen*** fra pådrag til tilstand kommer inn i bildet. Det viser seg nemlig at for lineære dynamiske systemer er Laplace-transformen av tilstandsvariabelen lik produktet av systemets ***transferfunksjon*** og Laplace-transformen av pådraget.

Jeg er fullstendig klar over at dette kan virke abstrakt. For å illustrere bruken av transfer-funksjoner, skal vi se på noen enkle fysiske systemer. Ikke ta det så tungt dersom du ikke får med deg all fysikken.

Båt på vann:

En båt med masse m og fart v påvirkes av en ytre kraft (motorkraft) $F(t)$, og av en vannmotstand $F_v = -b \cdot v$ der b er en konstant. Newtons 2. lov gir nå at

$$F(t) + F_v = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot \frac{dv}{dt} + b \cdot v = F(t).$$

Her er det naturlig å oppfatte kraften $F(t)$ som pådrag mens farten $v(t)$ er tilstand. Vi Laplace-transformerer likningen, og får

$$m \cdot \big(s \cdot V(s) - v(0)\big) + b \cdot V(s) = F(s).$$

Når vi jobber med transferfunksjoner, setter vi starttilstandene lik null. Da kan likningen ovenfor omformes slik:

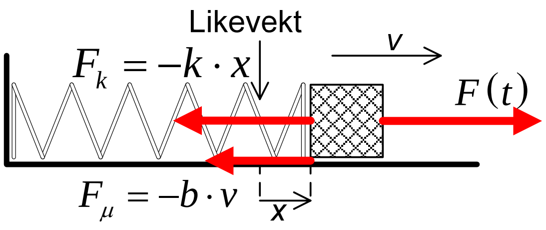
$$(m \cdot s + b) \cdot V(s) = F(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad V(s) = \frac{1}{m \cdot s + b} \cdot F(s) = H(s) \cdot F(s).$$

Vi ser at transferfunksjonen fra kraft til fart blir

$$H(s) = \frac{1}{m \cdot s + b}.$$

Kloss-fjær-system:



En kloss med masse *m* er festet til ei fjær med fjærkonstant *k*. Når klossen er forskjøvet en strekning *x* fra likevekt, virker det en fjærkraft

$$F_k = -k \cdot x$$

inn mot likevekt. Dessuten er det en bremsekraft

$$F_\mu = -b \cdot v = -b \cdot \frac{dx}{dt}$$

der *b* er en konstant. Videre antar vi at klossen påvirkes av en ytre kraft $F(t)$. Newtons 2. lov gir nå at

$$F(t) + F_\mu + F_k = m \cdot a$$

$$\Leftrightarrow \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F(t)$$

Her er det naturlig å oppfatte kraften $F(t)$ som pådrag mens posisjonen (avviket fra likevekt) $x(t)$ er tilstand. Vi Laplace-transformerer likningen, setter alle starttilstander lik null, og får

$$m \cdot s^2 \cdot X(s) + b \cdot s \cdot X(s) + k \cdot X(s) = F(s).$$

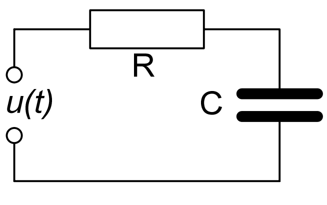
$$\Leftrightarrow \quad (m \cdot s^2 + b \cdot s + k) \cdot X(s) = F(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k} \cdot F(s) = H(s) \cdot F(s)$$

Vi ser at transferfunksjonen fra kraft til posisjon blir

$$H(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k}.$$

Elektrisk krets:



Vi har i et tidligere notat sett på en enkel elektrisk krets med en motstand *R* og en kondensator *C* som påvirkes av en ytre spenning $u(t)$, og fant at strømmen $i(t)$ er gitt ved

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)\, d\tau = u(t).$$

Det er nå vanlig å derivere denne likningen. Da får vi

$$R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{du(t)}{dt}.$$

Her er det naturlig å oppfatte den ytre spenningen $u(t)$ som pådrag mens strømmen $i(t)$ er tilstand. Vi Laplace-transformerer likningen, setter starttilstandene lik null, og får

$$R \cdot s \cdot I(s) + \frac{1}{C} \cdot I(s) = s \cdot U(s).$$

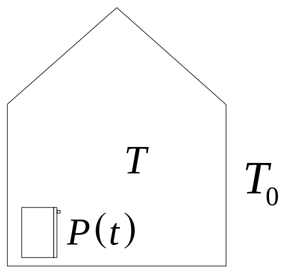
$$\Leftrightarrow \quad \left(R \cdot s + \frac{1}{C} \right) \cdot I(s) = s \cdot U(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad I(s) = \underline{\frac{s}{R \cdot s + \frac{1}{C}}} \cdot U(s) = H(s) \cdot U(s)$$

Vi ser at transferfunksjonen fra spenning til strøm blir

$$H(s) = \frac{s}{R \cdot s + \frac{1}{C}}.$$

Termisk system:



Varmestrømmen fra et legeme til omgivelsene er proporsjonal med temperaturforskjellen mellom legemet og omgivelsene. Dersom vi prøver å opprettholde temperaturen i et hus en kald dag, må vi tilføre en varmemengde $P(t)$ (for eksempel ved å slå på ovner). Når temperaturen utenfor huset er T_0, blir temperaturen T inne i huset er gitt ved likningen

$$\frac{dT}{dt} = k_1 \cdot P(t) - k_2 (T - T_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dT}{dt} + k_2 \cdot T = k_1 \cdot P(t) + k_2 \cdot T_0$$

Her er k_1 og k_2 konstanter som avhenger bl.a. av varmekapasiteten til huset og varme-overgangstall i vegger, gulv og tak.

Her er det naturlig å oppfatte den tilførte varmemengden $P(t)$ som pådrag mens temperaturen $T(t)$ er tilstand. Omgivelsestemperaturen T_0 oppfattes som en forstyrrelse.

Når vi Laplace-transformerer likningen, er det vanlig å se bort fra forstyrrelser (d.v.s. at vi setter dem lik null). Dessuten settes som før starttilstandene lik null. Da får vi

$$s \cdot T(s) + k_2 \cdot T(s) = k_1 \cdot P(s).$$

$$\Leftrightarrow \quad (s + k_2) \cdot T(s) = k_1 \cdot P(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad T(s) = \underline{\frac{k_1}{s + k_2}} \cdot P(s) = H(s) \cdot P(s)$$

Vi ser at transferfunksjonen fra tilført varme til innetemperatur blir

$$H(s) = \frac{k_1}{s + k_2}.$$

Selv om disse eksemplene omhandler svært forskjellige fysiske systemer, hentet fra ulike deler av fysikken, kan alle behandles på (nesten) samme måte ved hjelp av transferfunksjoner. Generelt har vi at dersom en tilstandsvariabel får verdien $x(t)$ når pådragsvariabelen er $y(t)$, eksisterer det alltid en transferfunksjon $H(s)$ slik at

$$X(s) = H(s) \cdot Y(s) \quad \Leftrightarrow \quad H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

Jeg minner om definisjonen av ***transferfunksjonen***:

Definisjon 2:
Dersom en tilstandsvariabel får verdien $x(t)$ når pådragsvariabelen er $y(t)$, kalles

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

for systemets *transferfunksjon* (mer presist: Transferfunksjonen fra $y(t)$ til $x(t)$).

Situasjonen kan illustreres slik:

$$\xrightarrow[y(t)]{Y(s)} \boxed{H(s)} \xrightarrow[x(t)]{X(s)}$$

Vi ser på et par eksempler:

Eksempel 5.1:
En båt har masse $m = 1000\,\text{kg}$. Vannmotsands-konstanten b har verdien $b = 200\,\text{N/(m/s)}$.

a) Sett opp transferfunksjonen fra motorkraft til fart for denne båten på grunnlag av teorien.

b) Finn farten som funksjon av tiden t når motorkraften er
$F(t) = 2000\,\text{N} \cdot (1 - e^{-0.1t})$.

Løsning:
a) Vi har allerede vist at transferfunksjonen er

$$H(s) = \frac{1}{m \cdot s + b} = \frac{1}{1000s + 200} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{s + \frac{200}{1000}} = \underline{\underline{\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{s + 0.2}}}.$$

De siste omformingene er gjort for å få enklere invers-transformering senere.

b) Når $F(t) = 2000\,\text{N} \cdot (1 - e^{-0.1t})$, blir

$$F(s) = 2000\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0.1}\right) = 2000\left(\frac{s + 0.1 - s}{s(s+0.1)}\right) = 2000 \cdot \frac{0.1}{s(s+0.1)} = \underline{\frac{200}{s(s+0.1)}}.$$

Videre er

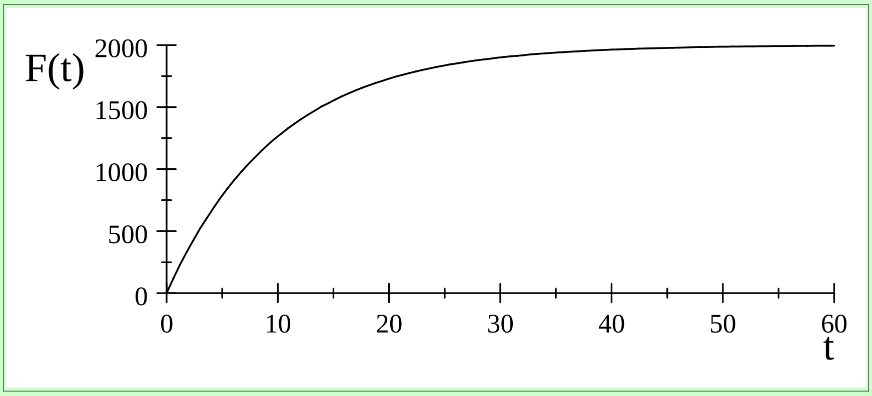
$$V(s)=H(s)\cdot F(s)=\left(\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{s+0.2}\right)\cdot\left(\frac{200}{s(s+0.1)}\right)=\frac{0.2}{s(s+0.2)(s+0.1)}$$

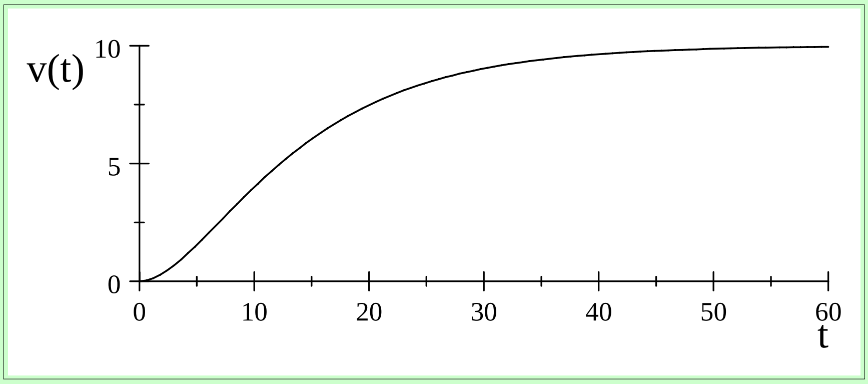
$$=\frac{10}{s}+\frac{50}{5s+1}-\frac{200}{10s+1}=\underline{\frac{10}{s}+\frac{10}{s+0.2}-\frac{20}{s+0.1}}$$

Her er delbrøkoppspaltingen gjort med dataverktøy. Den siste omformingen er gjort for å få enklere invers-transformering. Vi ser at

$$v(t)=\underline{\underline{10+10e^{-0.2t}-20e^{-0.1t}}}\,..$$

Grafene til $F(t)$ og $v(t)$ er vist nedenfor:





Eksempel 5.2:
En kloss med masse $m=1.0\,\text{kg}$ er festet til en fjær med fjærkonstant $k=100\,\text{N}/\text{m}$. Friksjonskraften er $F_\mu=-b\cdot v$ der $b=25\,\text{N/(m/s)}$ og v er farten. Klossen påvirkes av en ytre kraft $F(t)$. Klossens forskyvning fra likevekt er $x(t)$.

a) Sett opp systemets transferfunksjon fra ytre kraft til posisjon.

b) Finn tilstandsvariabelen $x(t)$ når:
1) $F(t)=30\,\text{N}$.
2) $F(t)=30\,\text{N}\cdot\sin(10t)$

Løsning:

a) Fra den innledende teorien har vi at transferfunksjonen er

.
$$H(s)=\frac{1}{m\cdot s^2+b\cdot s+k}=\frac{1}{s^2+25s+100}=\underline{\underline{\frac{1}{(s+20)(s+5)}}}$$

b1) Når den ytre kraften er $F(t)=30\,\mathrm{N}$, blir

$$F(s)=\frac{30}{s}.$$

Da blir

$$X(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{(s+20)(s+5)}\cdot\frac{30}{s}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s+20}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{s}$$

Invers-transformering gir

$$x(t)=\underline{\underline{\frac{1}{10}e^{-20t}-\frac{2}{5}e^{-5t}+\frac{3}{10}}}.$$

b2) Når den ytre kraften er $F(t)=30\,\mathrm{N}\cdot\sin(10t)$, blir

$$F(s)=30\cdot\frac{10}{s^2+10^2}=\frac{300}{s^2+100}.$$

Da blir

$$X(s)=H(s)\cdot F(s)=\frac{1}{(s+20)(s+5)}\cdot\frac{300}{(s^2+100)}$$

$$=\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{s+5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{s+20}-\frac{3}{25}\frac{s}{s^2+10^2}$$

Invers-transformering gir

$$x(t)=\underline{\underline{\frac{4}{25}e^{-5t}-\frac{1}{25}e^{-20t}-\frac{3}{25}\cos(10t)}}.$$

Nå er det din tur! Løs Oppgave 5.1 og Oppgave 5.2.

Ingeniører er også glad i å dele opp kompliserte systemer i mindre delsystemer (blokker). Det fins en rekke regler for manipulering av slike blokkdiagram. Dersom transferfunksjonene for hver blokk er kjent, kan vi finne transferfunksjonen for det sammensatte systemet ved hjelp av regler for sammensetting av transferfunksjonene for hver del-blokk.

I eksemplene ovenfor har vi funnet eksakte uttrykk for tilstanden $x(t)$. Men vi kan finne viktige egenskaper ved systemet uten å regne ut $x(t)$, bare ved å se på transferfunksjonen. For eksempel kan vi vise at dersom nevnerpolynomet i $X(s)$ har røtter med positiv realdel, så vil systemet være ustabilt (d.v.s. at $x(t)\to\infty$ ved ethvert pådrag forskjellig fra null). En erfaren ingeniør kan si svært mye om hvordan et system vil oppføre seg ut fra forholdsvis enkle analyser av transferfunksjonen.

5.2. Eksperimentell bestemmelse av transferfunksjonen.

Det er ikke alltid like enkelt å sette opp differensiallikningen(e) for et system. Men vi kan ofte finne transferfunksjonen eksperimentelt ved å la pådraget være et kjent signal (ofte et sprang), og måle tilstanden som funksjon av *t*. Hvis vi nå kan finne en tilstandsfunksjon $x(t)$ som lar seg Laplace-transformere, kan vi finne transferfunksjonen.

Det er utarbeidet spesielle teknikker for å automatisere dette arbeidet. Vi skal ikke komme inn på disse teknikkene her, men skal heller se på et enkelt eksempel.

Eksempel 5.3:
Du skal finne transferfunksjonen til et ukjent system. Du legger merke til at når pådraget er et enhetssprang ved $t = 0$, tilstanden blir en dempet sinus-svingning gitt ved

$$x(t) = \tfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 5t .$$

a) Bruk disse opplysningene til å finne systemets transferfunksjon.

b) Hvordan blir tilstaden dersom pådraget er

$$y(t) = 13e^{-t} .$$

Løsning:

a) Når pådraget $y(t)$ er et enhetssprang blir

$$Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Når $x(t) = \tfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 5t$, blir

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{5}{(s+2)^2+5^2} = \frac{\frac{5}{2}}{s^2+4s+29}.$$

Da blir systemets transferfunksjon

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{\frac{\frac{5}{2}}{s^2+4s+29}}{\frac{1}{s}} = \underline{\underline{\frac{\frac{5}{2}s}{s^2+4s+29}}}.$$

b) Når pådraget er $y(t) = 13e^{-t}$ blir

$$Y(s) = \frac{13}{s+1}.$$

Da blir

$$X(s) = H(s)\cdot Y(s) = \frac{\frac{5}{2}s}{s^2+4s+29}\cdot\frac{13}{s+1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{s+29}{s^2+4s+29} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+1}.$$

Men

$$\frac{s+29}{(s+2)^2+5^2} = \frac{(s+2)+27}{(s+2)^2+5^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+5^2} + \frac{27}{5}\cdot\frac{5}{(s+2)^2+5^2}$$

slik at

$$x(t) = \underline{\underline{\tfrac{1}{5}e^{-2t}\cos(5t) + \tfrac{27}{25}e^{-2t}\sin(5t) - \tfrac{1}{5}e^{-t}}}$$

Løs Oppgave 5.3.