6. Sprangfunksjonen.

6.1. Bruk av sprangfunksjonen.

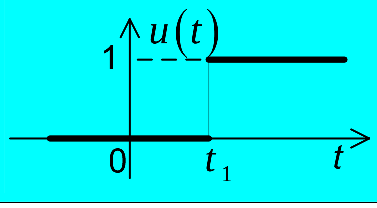
I fysiske systemer er det vanlig at signaler slås på og av. Når vi skal lage matematiske modeller av slike systemer, trenger vi en funksjon som kan representere slike plutselige brudd. Vi bruker da *enhetssprangfunksjonen*, som vi har vært litt inne på tidligere. Vi skal nå se nærmere på denne funksjonen.

På engelsk kalles funksjonen gjerne ***unit step function***, og vi bruker derfor symbolet $u(t)$ for den. Funksjonen går også under andre navn, for eksempel ***Heaviside-funksjonen*** etter *Oliver Heaviside*, som påviste nytten av den i ingeniør-anvendelser.

Hittil har vi latt spranget inntreffe ved $t = 0$. Men generelt kan spranget inntreffe ved et hvilket som helst tidspunkt t_1 der $t_1 \geq 0$. Et enhetssprang som inntreffer ved tidspunktet t_1 symboliseres ved $u(t-t_1)$. Mer presist defineres denne funksjonen slik:

Definisjon 4:
Enhetssprangfunksjonen er definert som

$$u(t-t_1) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad t < t_1 \\ 1 & \text{når} \quad t \geq t_1 \end{cases}$$



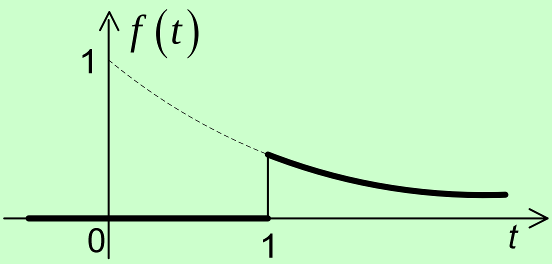
Vi skal illustrere bruken av denne funksjonen med et par eksempler.

***Eksempel 6.1*:** Skriv funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad t < 1 \\ e^{-t} & \text{når} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

ved hjelp av enhetssprangfunksjonen.

Løsning:



Vi kan skrive

$$f(t) = \begin{Bmatrix} e^{-t} \cdot 0 & \text{når} \quad t < 1 \\ e^{-t} \cdot 1 & \text{når} \quad t \geq 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{e^{-t} \cdot u(t-1)}}$$

fordi $u(t-1)$ er lik null når $t < 1$, og lik 1 når $t \geq 1$.

Vi har en nyttig tolking av enhetssprangfunksjonen: Vi bruker den til å *slå på* et signal ved tidspunktet t_1. I eksemplet over brukte vi enhetssprangfunksjonen til å *slå på* funksjonen e^{-t} ved tidspunktet $t = 1$.

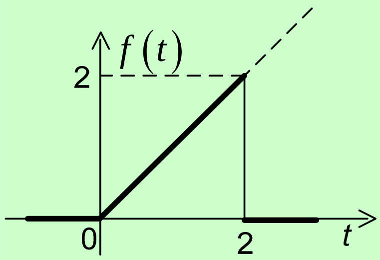
Vi kan også bruke enhetssprangfunksjonen til å *slå av* et signal slik neste eksempel viser.

***Eksempel 6.2*:** Skriv funksjonen

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{når} \quad 0\le t<2 \\ 0 & \text{når} \quad t\ge 2\end{cases}$$

ved hjelp av enhetssprangfunksjonen.

Løsning:



Vi starter med funksjonen $f(t)=t$ når $0\le t<2$ slik den stiplede linjen viser. Men så må vi *trekke fra t* når $t\ge 2$. Vi får altså at

$$f(t)=t-\begin{Bmatrix} t\cdot 0 & \text{når} \quad 0\le t<2 \\ t\cdot 1 & \text{når} \quad t\ge 2\end{Bmatrix}$$

$$=t-t\cdot u(t-2)=\underline{\underline{t\left(1-u(t-2)\right)}}$$

Hvis vi skal være veldig pirkete, bør vi presisere at vi ”slår på” signalet når $t=0$ og ”slår det av” når $t=2$. Vi burde altså skrevet

$$f(t)=t\cdot u(t-0)-t\cdot u(t-2)=t\left(u(t-0)-u(t-2)\right).$$

Men siden det er underforstått at $f(t)=0$ når $t<0$, er det vanlig å erstatte $u(t-0)$ med 1.

Disse eksemplene illustrerer en nyttig bruk av enhetssprangfunksjonen: Dersom et signal $f(t)$ ”slås på” ved tidspunktet t_1 og deretter ”slås av” ved et senere tidspunkt t_2, kan vi skrive

$$f(t)\cdot\left(\underbrace{u(t-t_1)}_{\substack{\text{slå på når}\\ t=t_1\ldots}}-\underbrace{u(t-t_2)}_{\substack{\ldots\text{og slå av igjen}\\ \text{når } t=t_2}}\right).$$

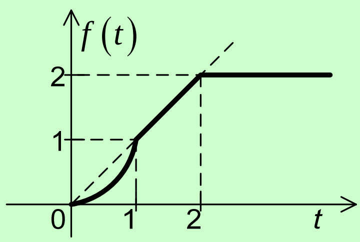
Vi avslutter med et litt mer komplisert eksempel.

***Eksempel 6.3*:** Skriv funksjonen

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad t<0 \\ t^2 & \text{når} \quad 0\le t<1 \\ t & \text{når} \quad 1\le t<2 \\ 2 & \text{når} \quad t\ge 2\end{cases}$$

ved hjelp av enhetssprangfunksjonen.

Løsning:



Vi løser problemet ved å ”slå på” og ”slå av” funksjoner ved de angitte *t*-verdiene, og deretter samle ledd:

$$f(t)=t^2\left(u(t-0)-u(t-1)\right)$$

$$+t\left(u(t-1)-u(t-2)\right)$$

$$+2\cdot u(t-2)$$

$$=\underline{\underline{t^2\cdot u(t-0)+\left(t-t^2\right)u(t-1)+(2-t)u(t-2)}}$$

Det kan være tungvint å gå fram slik vi gjorde i eksemplet ovenfor. Metoden nedenfor er mer direkte:

Dersom en funksjon er gitt på formen

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{når} & t<t_1\\ f_1(t) & \text{når} & t_1\le t<t_2\\ f_2(t) & \text{når} & t_2\le t<t_3\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n-1}(t) & \text{når} & t_{n-1}\le t<t_n\\ f_n(t) & \text{når} & t\ge t_n\end{cases}$$

kan funksjonen skrives

$$f(t)=f_1(t)\cdot u(t-t_1)+\left(f_2(t)-f_1(t)\right)\cdot u(t-t_2)+\cdots+\left(f_n(t)-f_{n-1}(t)\right)\cdot u(t-t_n)$$

Ledd av typen

$$\left(f_2(t)-f_1(t)\right)\cdot u(t-t_2)$$

kan da oppfattes som ”ved tidspunktet t_2 slår vi på signalet $f_2(t)$ samtidig som vi slår av signalet $f_1(t)$”.

Løs Oppgave 6.1. Du får bruk for den senere.

I neste eksempel skal vi gå motsatt vei: Vi kjenner en funksjon uttrykt ved enhetssprang-funksjoner, og skal skrive funksjonen på intervallform.

Eksempel 6.4: Skriv funksjonen

$$f(t)=(2-t)u(t-0)+\left(e^{-(t-1)}+t-2\right)u(t-1)$$

på intervallform.

Løsning: Vi ser at:

Når $t<0$, er både $u(t-0)=0$ og $u(t-1)=0$.

Da blir $f(t)=(2-t)\cdot 0+\left(e^{-(t-1)}+t-2\right)\cdot 0=\underline{0}$.

Når $0\le t<1$, er $u(t-0)=1$ mens $u(t-1)=0$.

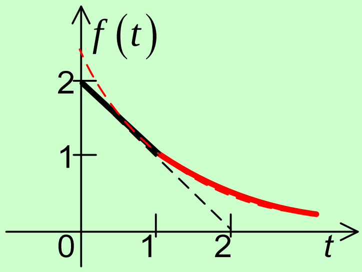
Da blir $f(t)=(2-t)\cdot 1+\left(e^{-(t-1)}+t-2\right)\cdot 0=\underline{2-t}$.

Når $t\ge 1$, er både $u(t-0)=1$ og $u(t-1)=1$.

Da blir $f(t)=(2-t)\cdot 1+\left(e^{-(t-1)}+t-2\right)\cdot 1=\underline{e^{-(t-1)}}$.

Altså blir

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad t<0 \\ 2-t & \text{når} \quad 0\le t<1 \\ e^{-(t-1)} & \text{når} \quad t\ge 1 \end{cases}$$



Se figuren til høyre.

Løs Oppgave 6.2.

6.2. Laplace-transform av enhetssprangfunksjonen.

Nå er tiden inne til å Laplace-transformere enhetssprangfunksjonen. Vi får da at:

$$L\{u(t-t_1)\}=\frac{1}{s}e^{-t_1\cdot s}$$

Dette bevises ved å bruke definisjonen på Laplace-transform:

$$L\{u(t-t_1)\}=\int_0^\infty u(t-t_1)\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^{t_1}0\cdot e^{-s\cdot t}dt+\int_{t_1}^\infty 1\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

$$=0-\frac{1}{s}\left[e^{-s\cdot t}\right]_{t_1}^\infty=-\frac{1}{s}\left(0-e^{-s\cdot t_1}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{s}e^{-s\cdot t_1}}}$$

forutsatt at $\mathrm{Re}(s)>0$.

Vi vet fra før at dersom spranget inntreffer når $t=0$, blir $L\{1\}=\frac{1}{s}$. Vi ser at faktoren $e^{-s\cdot t_1}$ svarer til at enhetsspranget forsinkes en tid t_1.

Betyr dette at vi alltid bare kan multiplisere med $e^{-s\cdot t_1}$ når vi skal Laplace-transformere en funksjon som er multiplisert med $u(t-t_1)$? Svaret er dessverre nei. Det er nok litt mer komplisert.

Den vanlige "lærebok-formelen" for å Laplace-transformere funksjoner som inneholder enhetssprangfunksjonen ser slik ut:

Setning 8a: $L\{f(t-t_1)\cdot u(t-t_1)\}=L\{f(t)\}\cdot e^{-t_1\cdot s}$

Problemet med denne setningen er at for å kunne bruke den, må funksjonen først skrives på formen $f(t-t_1)$. Vanligvis har vi funksjonen skrevet på formen $f(t)$. Da er det enklere å bruke varianten nedenfor:

Setning 8b: $L\{f(t)\cdot u(t-t_1)\} = L\{f(t+t_1)\}\cdot e^{-t_1\cdot s}$

Beviset for disse setningene finner du i et vedlegg.

Setning 8b kan utformes som en "oppskrift":

Du beregner Laplace-transformen til

$$f(t)\cdot u(t-t_1)$$

slik:

1. Erstatt t med $t+t_1$.
2. Laplace-transformer resultatet.
3. Multipliser med $e^{-t_1\cdot s}$.

La oss se hvordan denne oppskriften fungerer i praksis.

Eksempel 6.5: Laplace-transformer funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{når} \quad t < 2 \\ 0 & \text{når} \quad t \geq 2 \end{cases} = t - t\cdot u(t-2)$$

(se Eksempel 6.2).

Løsning:

$$L\{f(t)\} = L\{t\} - L\{t\cdot u(t-2)\} = \frac{1}{s^2} - L\{t+2\}\cdot e^{-2s} = \underline{\underline{\frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)e^{-2s}}}\,.$$

Løs Oppgave 6.3. (Du får bruk for løsningene på Oppgave 6.1).

Nå er tiden inne til å invers-transformere Laplace-transformer som har $e^{-t_1\cdot s}$ som faktor. Da bruker vi denne setningen:

Setning 9:

Dersom

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t),$$

så er

$$L^{-1}\{F(s)\cdot e^{-t_1\cdot s}\} = f(t-t_1)\cdot u(t-t_1).$$

Setningen er bevist i samme vedlegg som ovenfor.

Også denne setningen er lettest å bruke dersom vi utformer den som en ”oppskrift”:

Du beregner invers Laplace-transform til $F(s)\cdot e^{-t_1\cdot s}$ slik:

1. Invers-transformer $F(s)$ til $f(t)$.
2. Erstatt *t* med $t-t_1$.
3. Multipliser med $u(t-t_1)$.

La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

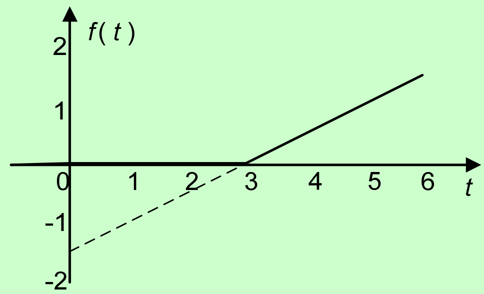
Eksempel 6.6: Beregn

$$f(t)=F^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2}e^{-3s}\right\}.$$

Løsning: Ifølge oppskriften skal vi starte med å invers-transformere $\dfrac{1}{2s^2}$, og får $\frac{1}{2}t$. Deretter skal vi erstatte *t* med $t-3$, og multiplisere med $u(t-3)$. Resultatet blir:

$$f(t)=F^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2}e^{-3s}\right\}=\left(\tfrac{1}{2}(t-3)\right)u(t-3)$$

$$=\underline{\underline{\left(\tfrac{1}{2}t-\tfrac{3}{2}\right)u(t-3)}}=\begin{cases}0 & \text{når} \quad t<3\\ \underline{\underline{\tfrac{1}{2}t-\tfrac{3}{2}}} & \text{når} \quad t\geq 3\end{cases}$$



Av figuren ser du at grafen til $y=\frac{1}{2}t$ er blitt forskjøvet en strekning 3 langs *t*-aksen. Og det er jo nettopp dette vi ønsker å oppnå med en tidsforskyvning.

For kontrollens skyld kan vi jo bruke resultatet fra Eksempel 6.5, og regne oss tilbake til utgangspunktet.

Eksempel 6.7: Beregn

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)e^{-2s}\right\}.$$

Løsning: Vi planlegger å invers-transformere ledd for ledd. Du ser av tabell at

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t\,.$$

Invers-transformeringen av $\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}\right)e^{-2s}$ er mer brysom. Vi starter med å merke oss at

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right\}=t+2.$$

Så erstatter vi *t* med $t-2$ ifølge Setning 9, og får

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)\cdot e^{-2s}\right\}=\left((t-2)+2\right)\cdot u(t-2)=t\cdot u(t-2).$$

Vi samler trådene, og får at

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)\cdot e^{-2s}\right\}=t-t\cdot u(t-2)=\underline{\underline{t\left(1-u(t-2)\right)}}.$$

Det er som regel lettere å tolke løsningen når den skrives på intervallform. Da får vi:

- Når $t<0$ er $f(t)=0$. (Strengt tatt er ikke $f(t)$ definert når $t<0$, men det er vanlig å sette $f(t)=0$ da).
- Når $0\le t<2$, er $u(t-2)=0$ slik at $f(t)=t(1-0)=t$.
- Når $t\ge 2$, er $u(t-2)=1$ slik at $f(t)=t(1-1)=0$.

Altså blir

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad t<0\\ t & \text{når} \quad 0\le t<2\\ 0 & \text{når} \quad t>2\end{cases}$$

Løs Oppgave 6.4.

Nå lurer du sikkert på hva dette kan brukes til i praksis. Det får du svar på i neste avsnitt.

6.3. Differensiallikninger med sprangfunksjoner.

Skikkelig moro blir det først når vi har inhomogene differensial-likninger der høyresiden er bygd opp av sprangfunksjoner, slik som i de neste eksemplene. Slike problemer er temmelig kronglete å løse med tradisjonelle metoder.

Eksempel 6.8: Vi har tidligere vist at temperaturen *T* i et legeme (for eksempel et hus) er gitt ved differensiallikningen

$$\frac{dT}{dt}+k_2\cdot T=k_1\cdot P(t)+k_2\cdot T_0$$

der T_0 er omgivelsestemperaturen, $P(t)$ er tilført varme (for eksempel fra ovner), mens k_1 og k_2 er konstanter.

Sett $k_1=20$, $k_2=1$, $T_0=0$, og

$$P(t)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad t<0\\ 2 & \text{når} \quad 0\le t<1,\\ 1 & \text{når} \quad t\ge 1\end{cases}$$

og finn $T(t)$ når $T(0)=0$.

Løsning: Vi setter inn de oppgitte størrelsene, og ser at vi skal løse differensiallikningen

$$\frac{dT}{dt}+T=20P(t), \qquad T(0)=0.$$

Nå er det mest oversiktlig å Laplace-transformere $P(t)$ for seg først. Vi får

$$P(t)=\begin{Bmatrix} 0 & \text{når} & t<0 \\ 2 & \text{når} & 0\le t<1 \\ 1 & \text{når} & t\ge 1 \end{Bmatrix}=(2-0)u(t-0)+(1-2)u(t-1)=\underline{2u(t-0)-u(t-1)}.$$

Laplace-transformen blir

$$\underline{P(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}}.$$

Nå er vi klar til å Laplace-transformere hele likningen:

$$s\cdot T(s)-T(0)+T(s)=20P(s)$$

$$(s+1)T(s)-0=20\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right)$$

$$T(s)=\frac{40}{s(s+1)}-\frac{20e^{-s}}{s(s+1)}=\underline{40\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)-20\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-s}}$$

Nå invers-transformerer vi ledd for ledd:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}=1-e^{-t}.$$

Da blir

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-s}\right\}=\left(1-e^{-(t-1)}\right)u(t-1).$$

Vi samler trådene:

$$T(t)=\underline{\underline{40\left(1-e^{-t}\right)-20\left(1-e^{-(t-1)}\right)u(t-1)}}.$$

Vi kan skrive dette på intervallform ved å benytte at $u(t-1)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad t<1 \\ 1 & \text{når} \quad t\ge 1 \end{cases}$.

Når $0\le t<1$ blir

$$T(t)=40\left(1-e^{-t}\right)-20\left(1-e^{-(t-1)}\right)\cdot 0=\underline{40-40e^{-t}}.$$

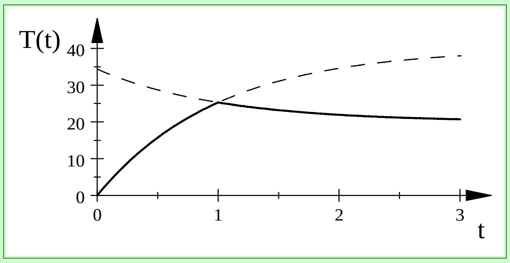
Når $t\ge 1$ blir

$$T(t)=40\left(1-e^{-t}\right)-20\left(1-e^{-(t-1)}\right)\cdot 1=\underline{20-40e^{-t}+20e^{-(t-1)}}.$$

Altså er

$$T(t)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad t<0 \\ 40-40e^{-t} & \text{når} \quad 0\le t<1 \\ 20-40e^{-t}+20e^{-(t-1)} & \text{når} \quad t\ge 1 \end{cases}$$

Grafen til $T(t)$ er tegnet til høyre.

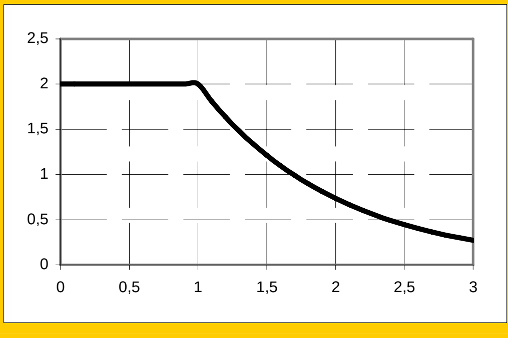


Eksempel 6.9: Vi har tidligere sett at farten til en båt er gitt ved differensiallikningen

$$m\cdot\frac{dv}{dt}+b\cdot v=F(t)$$

der $F(t)$ er motorkraften. Sett $m=1$, $b=2$, og

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{når} \quad t<0\\ 2 & \text{når} \quad 0\le t<1\\ 2e^{-(t-1)} & \text{når} \quad t\ge 1\end{cases}$$



Grafen til $F(t)$ er vist til høyre.

Løs differensiallikningen når $v(0)=0$.

Løsning: Med de gitte størrelsene blir differensiallikningen

$$\frac{dv}{dt}+2v=F(t).$$

Som før starter vi med å Laplace-transformere $F(t)$:

$$F(t)=\left.\begin{cases}0 & \text{når} \quad t<0\\ 2 & \text{når} \quad 0\le t<1\\ 2e^{-(t-1)} & \text{når} \quad t\ge 1\end{cases}\right\}=2u(t-0)+\left(2e^{-(t-1)}-2\right)u(t-1)$$

Da blir

$$F(s)=L\{2u(t-0)\}+L\left\{2\left(e^{-(t-1)}-1\right)u(t-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{s}+2\cdot L\left\{e^{-((t+1)-1)}-1\right\}e^{-s}=\frac{2}{s}+2\cdot L\left\{e^{-t}-1\right\}e^{-s}$$

$$=\frac{2}{s}+2\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}\right)e^{-s}=\frac{2}{s}+2\frac{s-(s+1)}{s(s+1)}e^{-s}=\underline{\frac{2}{s}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}}$$

Så Laplace-transformerer vi hele likningen:

$$s\cdot V(s)-v(0)+2v(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}$$

$$\Leftrightarrow \quad (s+2)V(s)-0=\frac{2}{s}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}$$

$$\Leftrightarrow \quad V(s)=\frac{2}{s(s+2)}-\frac{2}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}$$

Nå gjenstår invers-transformeringen av $V(s)$. Vi starter med det første leddet. Delbrøk-oppspalting gir

$$\frac{2}{s(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}$$

som invers-transformeres til

$\underline{1-e^{-2t}}$.

Så går vi løs på det siste leddet. Der er

$$\frac{2}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

som invers-transformeres til

$\underline{1-2e^{-t}+e^{-2t}}$.

Nå må vi samle trådene. Da får vi at

$$v(t)=L^{-1}\{V(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+1)(s+2)}e^{-s}\right\}$$

$$=\underline{\underline{\left(1-e^{-2t}\right)u(t-0)-\left(1-2e^{-(t-1)}+e^{-2(t-1)}\right)u(t-1)}}$$

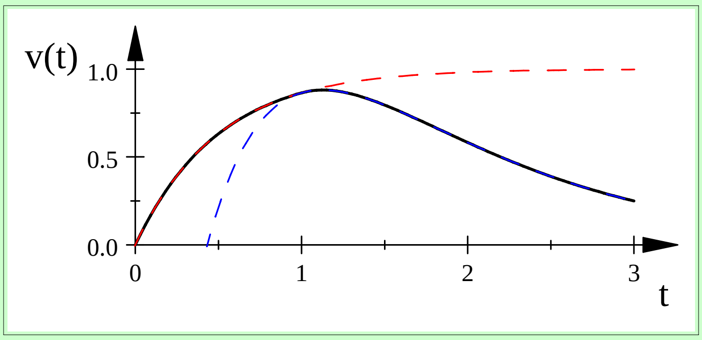
Dette svaret kan skrives på intervallform. Vi får at:

- Når $0\le t<1$, er $u(t-1)=0$ slik at i dette intervallet er
  $v(t)=1-e^{-2t}$.
- Når $t\ge 1$, blir
  $v(t)=\left(1-e^{-2t}\right)-\left(1-2e^{-(t-1)}+e^{-2(t-1)}\right)=\underline{2e^{-(t-1)}-e^{-2t}-e^{-2(t-1)}}$.

Vi kan altså skrive

$$v(t)=\begin{cases} 0 & \text{når} \quad t<0 \\ 1-e^{-2t} & \text{når} \quad 0\le t<1 \\ 2e^{-(t-1)}-e^{-2t}-e^{-2(t-1)} & \text{når} \quad t\ge 1 \end{cases}$$

Nedenfor er grafen til $v(t)$ tegnet inn sammen med grafen til $1-e^{-2t}$ (stiplet rødt) og grafen til $2e^{-(t-1)}-e^{-2t}-e^{-2(t-1)}$ (stiplet blått).



Løs Oppgave 6.5.