8. Periodiske funksjoner.

(Orienteringsstoff)

Som du sikkert husker, sier vi at et en funksjon *f* er ***periodisk*** med periode *p* dersom

$$f(t+p) = f(t).$$

Laplace-transformen for slike periodiske funksjoner får en litt spesiell form:

Setning 10:

Dersom *f* er periodisk med periode *p*, blir

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-p\cdot s}} \cdot \int_0^p f(t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt$$

Bevis: Vi starter som så ofte før med definisjonen av Laplace-transform:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = \int_0^p f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt + \int_p^\infty f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt \qquad (*)$$

I det siste integralet innfører vi en ny variabel

$$\tau = t - p \quad \Leftrightarrow \quad t = \tau + p.$$

Vi ser at $\tau = 0$ når $t = p$, og at $dt = d\tau$.

Da blir

$$\int_p^\infty f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = \int_0^\infty f(\tau+p)\cdot e^{-s\cdot(\tau+p)}d\tau = e^{-p\cdot s}\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-s\cdot\tau}d\tau = e^{-p\cdot s}\cdot L\{f(\tau)\}$$

fordi $f(\tau+p) = f(\tau)$. Men det er jo likegyldig om vi kaller integrasjonsvariabelen τ eller *t* slik at $L\{f(\tau)\} = L\{f(t)\}$. Innsetting i (*) gir nå

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt = \int_0^p f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt + e^{-p\cdot s}\cdot L\{f(t)\}.$$

Dette er en likning som vi kan løse $L\{f(t)\}$ ut av. Vi får

$$L\{f(t)\} - e^{-p\cdot s}\cdot L\{f(t)\} = \int_0^p f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

$$\Leftrightarrow \quad L\{f(t)\}\left(1-e^{-p\cdot s}\right) = \int_0^p f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

$$\Leftrightarrow \quad L\{f(t)\} = \underline{\frac{1}{1-e^{-p\cdot s}}\int_0^p f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt}$$

Og det var dette vi skulle vise.

Eksempel 8.1: Finn Laplace-transformen til den periodiske funksjonen f gitt ved

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{når} \quad 0\le t<1 \\ -1 & \text{når} \quad 1\le t<2\end{cases}, \qquad f(t+2)=f(t)$$

Løsning: Dette er en periodisk funksjon med periode $p=2$. Da er

$$\begin{aligned}
L\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 1\cdot e^{-s\cdot t}dt+\int_1^2(-1)\cdot e^{-s\cdot t}dt\right)\\
&= \frac{1}{1-\left(e^{-s}\right)^2}\left(-\frac{1}{s}\left[e^{-s\cdot t}\right]_0^1+\frac{1}{s}\left[e^{-s\cdot t}\right]_1^2\right)\\
&= \frac{1}{\left(1-e^{-s}\right)\left(1+e^{-s}\right)}\left(-\frac{1}{s}\left(e^{-s}-1\right)+\frac{1}{s}\left(e^{-2s}-e^{-s}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\left(1-e^{-s}\right)\left(1+e^{-s}\right)}\cdot\frac{1}{s}\left(e^{-2s}-2e^{-2}+1\right)\\
&= \frac{1}{\left(1-e^{-s}\right)\left(1+e^{-s}\right)}\cdot\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)^2\\
&= \underline{\underline{\frac{1}{1+e^{-s}}\cdot\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)}}
\end{aligned}$$

For å kunne ha noen nytte av slike Laplace-transformer, må vi også kunne invers-transformere. Og det er ikke alltid like enkelt. Den mest systematiske teknikken er kanskje å benytte formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke:

$$a_0+a_0\cdot k+a_0\cdot k^2+\cdots+a_0\cdot k^n+\cdots=\frac{a_0}{1-k}$$

forutsatt at rekka konvergerer.

Dersom a_0 og k er reelle, konvergerer rekka dersom $-1<k<1$. Men vi kommer til å operere med komplekse funksjoner. Vi kan imidlertid vise at de rekkene som vi kommer borti, vil konvergere dersom $\operatorname{Re}(s)>0$, og det skal vi forutsette er oppfylt.

La oss se hvordan dette kan fungere i praksis.

Eksempel 8.2: La funksjonen i Eksempel 8.1 være pådrag til den RC-kretsen som vi har sett på tidligere, med $R=10\,k\Omega$ og $C=100\,\mu F$. Finn spenningen $u_C(t)$ over kondensatoren.

Løsning: Vi har tidligere funnet at transferfunksjonen fra inngangs-spenning til strøm for en slik elektrisk krets er

$$H(s)=\frac{s}{R\cdot s+\frac{1}{C}}=\frac{s}{10\cdot10^3\cdot s+\frac{1}{100\cdot10^{-6}}}=\underline{10^{-4}\cdot\frac{s}{s+1}}$$

slik at

$$I(s)=H(s)\cdot L\{f(t)\}=\left(10^{-4}\cdot\frac{s}{s+1}\right)\left(\frac{1}{1+e^{-s}}\cdot\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)\right)=\underline{\frac{10^{-4}\left(1-e^{-s}\right)}{(s+1)\left(1+e^{-s}\right)}}.$$

Men spenningen $u_C(t)$ over kondensatoren er

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau\,.$$

Denne sammenhengen Laplace-transformeres, og vi får

$$U_C(s) = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}I(s) = \frac{1}{\cancel{100\cdot 10^{-6}}\cdot s}\cdot\frac{\cancel{10^{-4}}\left(1-e^{-s}\right)}{(s+1)\left(1+e^{-s}\right)}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)}\cdot\left(1-e^{-s}\right)\cdot\frac{1}{1+e^{-s}}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)}\left(1-e^{-s}\right)\left(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\cdots+(-1)^n e^{-n\cdot s}+\cdots\right)$$

$$= \frac{\left(1-e^{-s}+e^{-2s}+\cdots+(-1)^n e^{-n\cdot s}+\cdots\right)-e^{-s}\left(1-e^{-s}+e^{-2s}+\cdots+(-1)^n e^{-n\cdot s}+\cdots\right)}{s(s+1)}$$

$$= \underline{\frac{1}{s(s+1)}-\frac{2}{s(s+1)}e^{-s}+\frac{2}{s(s+1)}e^{-2s}+\cdots+\frac{2(-1)^n}{s(s+1)}e^{-n\cdot s}+\cdots}$$

Så invers-transformerer vi:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

slik at

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \underline{1-e^{-t}}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-2}{s(s+1)}\cdot e^{-s}\right\} = -2\left(1-e^{-(t-1)}\right)u(t-1) = \underline{-2\left(1-e^{1}\cdot e^{-t}\right)u(t-1)}$$

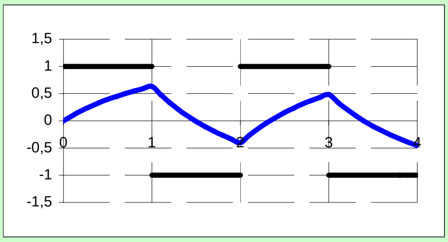
$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+1)}\cdot e^{-2s}\right\} = 2\left(1-e^{-(t-2)}\right)u(t-2) = \underline{2\left(1-e^{2}\cdot e^{-t}\right)u(t-2)}$$

og generelt

$$L^{-1}\left\{\frac{2\cdot(-1)^n}{s(s+1)}\cdot e^{-n\cdot s}\right\} = 2\cdot(-1)^n\left(1-e^{-(t-n)}\right)u(t-n) = \underline{2\cdot(-1)^n\left(1-e^{n}\cdot e^{-t}\right)u(t-n)}\,.$$

Spenningen $u_C(t)$ over kondensatoren blir da summen av alle disse leddene. Dette svaret er kanskje lettere å tolke dersom det skrives på intervallform. Vi får da at

$$u_C(t) = \begin{cases} 1-e^{-t} & \text{når} \quad 0 \le t < 1 \\ -1+(2e-1)e^{-t} & \text{når} \quad 1 \le t < 2 \\ 1+\left(-2e^2+2e-1\right)e^{-t} & \text{når} \quad 2 \le t < 3 \\ & \text{osv...} \end{cases}$$



Grafen er tegnet til høyre.