3. Invers Laplace-transform.

3.1. Generell innledning.

I forrige avsnitt var problemstillingen:

- Gitt en funksjon $f(t)$. Finn den tilhørende Laplace-transformen $F(s) = L\{f(t)\}$.

I dette avsnittet skal vi ta for oss den motsatte problemstillingen:

- Gitt en Laplace-transform $F(s)$. Finn den tilhørende funksjonen $f(t)$ som er slik at $L\{f(t)\} = F(s)$.

Definisjon 3:

Anta at $f(t)$ har Laplace-transform $F(s)$.

Da sier vi at $f(t)$ er den *inverse Laplace-transformen* av $F(s)$.

Vi skriver $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

Først et generelt problem: Er den inverse Laplace-transformen entydig? Med andre ord: Kan det være to (eller flere) funksjoner $f_1(t)$ og $f_2(t)$ som har samme Laplace-transform $F(s)$?

Svaret ligger i følgende setning (som vi ikke skal bevise):

Setning 6:

Dersom to stykkevis kontinuerlige funksjoner $f_1(t)$ og $f_2(t)$ har samme Laplace-transform $F(s)$, så er $f_1(t) = f_2(t)$ overalt unntatt muligens i eventuelle diskontinuitetspunkter.

Setningen medfører altså at når $F(s)$ er kjent, kan vi (iallfall i prinsippet) finne den inverse Laplace-transformen $f(t)$ unntatt i eventuelle diskontinuitetspunkter.

Fra definisjonen av Laplace-transform har du sikkert merket deg at vi kun integrerer fra null til uendelig. Dette medfører at vi ikke bryr oss om verdien av $f(t)$ når $t < 0$. I praksis forutsetter vi gjerne at $f(t) = 0$ når $t < 0$. Når vi invers-transformerer en funksjon $F(s)$, er det gjerne underforstått at $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ er lik null når $t < 0$.

Men hvordan går vi fram for å finne $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$?

Rent formelt kan vi finne $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ ved å utføre en integrasjon i det komplekse *s*-planet. Men integrasjon i det komplekse plan er ukjent mark for oss. Vi skal heller benytte den mer vanlige teknikken: Vi benytter tabellen over Laplace-transformer.

Men først trenger vi en setning til:

Setning 7:
Dersom $F(s)$ og $G(s)$ har inverse Laplace-transformer $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ og $g(t) = L^{-1}\{G(s)\}$, og *a* og *b* er konstanter (som kan være komplekse), så er

$$L^{-1}\{a \cdot F(s) + b \cdot G(s)\} = a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$$

Setningen sier kort og godt at vi kan invers-transformere ledd for ledd på samme måte som når vi Laplace-transformerer.

Et skikkelig bevis for denne setningen går etter samme prinsipp som beviset for Setning 1, men integrasjonene må utføres i det komplekse *s*-planet.

For å kunne bruke Setning 7 og tabellen over Laplace-transformer, må vi som oftest benytte *delbrøkoppspaltning*. Prinsippene for delbrøkoppspalting kan du finne i et eget notat, men det kan bli bruk for spesielle varianter nå. La oss se hvordan dette fungerer i praksis.

3.2. Delbrøkoppspalting – ulike reelle førstegradsfaktorer.

Vi skal først se hvordan vi går fram når nevneren i Laplace-transformen kan faktoriseres i ulike reelle førstegradsfaktorer i *s*. Vi starter med et enkelt eksempel.

***Eksempel 3.1*:** Beregn $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ når

$$F(s) = \frac{2}{s(s+1)}.$$

Løsning: Vi spalter først $F(s)$ opp i to brøker slik:

$$F(s) = \frac{2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{A\cdot(s+1) + B\cdot s}{s(s+1)} = \frac{(A+B)s + A}{s(s+1)}$$

Dersom første og siste brøk skal være like for alle verdier av *s*, må vi ha at

$$A = \underline{2}$$

og

$$A + B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -A = \underline{-2}.$$

Altså er

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}.$$

Nå invers-transformerer vi ledd for ledd ved hjelp av tabellen:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right\} = 2 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$= 2 \cdot 1 - 2 \cdot e^{-t} = \underline{\underline{2\left(1 - e^{-t}\right)}}$$

Denne delbrøkoppspaltingen kan også gjøres med dataverktøy:

- På TI-89 gjøres det med **expand**-kommandoen slik:
  expand(2/(x*(x+1)))
  der jeg bruker **x** istedenfor **s** fordi **x**-en er lettere tilgjengelig på kalkulatoren.

- Med Scientific Notebook skriver du inn brøken, lar markøren stå i brøken, og velger
  Compute >> **Polynomials** >> **Partial Fractions**

Vi ser på et eksempel til mens vi er i gang:

***Eksempel 3.2*:** Beregn $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ når

$$F(s) = \frac{3s+4}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

Løsning: Vi starter med å faktorisere nevneren:

$$s^3 + 3s^2 + 2s = s\left(s^2 + 3s + 2\right) = s(s+2)(s+1).$$

Altså er

$$F(s) = \frac{3s+4}{s(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$
$$= \frac{A(s+2)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+2)}{s(s+2)(s+1)}$$
$$= \frac{A\left(s^2 + 3s + 2\right) + B\left(s^2 + s\right) + C\left(s^2 + 2s\right)}{s(s+2)(s+1)}$$
$$= \frac{(A+B+C)s^2 + (3A+B+2C)s + 2A}{s(s+2)(s+1)}$$

Dersom første og siste brøk skal være like for alle verdier av *s*, må vi ha at

$$A + B + C = 0$$
$$3A + B + 2C = 3$$
$$2A = 4$$

Av den siste likningen får vi direkte at

$$2A = 4 \quad \Leftrightarrow \quad A = \underline{2}.$$

Trekkes de to øverste likningene fra hverandre, får vi

$$2A + C = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = 3 - 2A = 3 - 2 \cdot 2 = \underline{-1}.$$

Til slutt gir den øverste likningen:

$$B = -A - C = -2 - (-1) = \underline{-1}.$$

Altså er

$$F(s) = \frac{3s+4}{s(s+2)(s+1)} = \underline{\frac{2}{s} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}}.$$

Dette invers-transformeres ledd for ledd, og vi får fra tabellen at

$$f(t) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot e^{-2t} - 1 \cdot e^{-t} = \underline{\underline{2 - e^{-t} - e^{-2t}}}.$$

Slik invers-transformasjon ***må*** du beherske dersom du vil henge med videre. Prøv deg derfor på Oppgave E3.1.

Denne teknikken fungerer fint så lenge nevneren kun inneholder ulike, reelle førstegrads-faktorer. Men hva skal vi gjøre dersom nevneren i $F(s)$ ikke kan faktoriseres i ulike, reelle førstegradsfaktorer? La oss først se på problemet med *flere like* førstegradsfaktorer.

3.3. Delbrøkoppspalting – flere like reelle førstegradsfaktorer.

Når samme førstegradsfaktor opphøyes i *n*'te i nevneren, må vi delbrøkoppspalte på denne måten:

$$\frac{P(s)}{(s-a)^n} = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a)^n}$$

Her er $P(s)$ et polynom av lavere grad enn *n*. Eksemplet nedenfor viser hvordan dette fungerer i praksis:

Eksempel 3.3: Beregn $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ når

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Løsning: Vi delbrøkoppspalter slik:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{A(s+1)^2 + Bs + Cs(s+1)}{s(s+1)^2}$$

$$= \frac{As^2 + 2As + A + Bs + Cs^2 + Cs}{s(s+1)^2} = \frac{(A+C)s^2 + (2A+B+C)s + A}{s(s+1)^2}$$

Dersom første og siste brøk skal være like for alle verdier av *s*, må vi ha at

$$A + C = 0$$
$$2A + B + C = 0$$
$$A = \underline{1}$$

Den øverste likningen gir nå
$$C = -A = \underline{-1},$$
som innsatt i den midterste gir
$$B = -2A - C = -2 \cdot 1 - (-1) = \underline{-1}.$$

Altså er
$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

som ved hjelp av tabellen inverstransformeres til

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \underline{\underline{1 - t \cdot e^{-t} - e^{-t}}}.$$

I L3 i tabellen ser du at
$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Bytt ut n med $k-1$, og invers-transformer. Da får du at
$$L\{t^{k-1}\} = \frac{(k-1)!}{s^k} \quad \Leftrightarrow \quad t^{k-1} = L^{-1}\left\{\frac{(k-1)!}{s^k}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^k}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}}}.$$
Dette resultatet kan vi kombinere med Setning 4. Da får vi:
$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^k}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{a \cdot t}}}.$$

Disse to resultatene er føyd til i tabellen.

Eksempel 3.4: Beregn $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ når
$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^3}.$$

Løsning: Vi benytter formelen ovenfor med $k = 3$. Da får vi:
$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = 4 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\} = 4 \cdot \frac{1}{(3-1)!} \cdot t^{3-1}e^{-t} = \underline{\underline{2t^2e^{-t}}}.$$

Løs Oppgave 3.2.

3.4. Delbrøkoppspalting – andregradsfaktorer.

Dersom nevneren ikke kan faktoriseres i reelle førstegradsfaktorer, har vi to muligheter:

- Vi kan faktorisere i *komplekse* førstegradsfaktorer og invers-transformere til eksponentialfunksjoner komplekse eksponenter, og deretter omforme ved hjelp av
$$e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t).$$
- Eller vi kan bruke linje L6 – L9 i tabellen og invers-transformere til sinus- og cosinus-funksjoner.

Vi foretrekker den siste metoden, og starter med et enkelt eksempel:

Eksempel 3.5: Beregn $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ når
$$F(s)=\frac{3s-8}{s^2+4}.$$

Løsning: Ta en titt i tabellen. Fra L7 i tabellen ser du at
$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}=\cos(2t)$$
og fra L6 ser du at
$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}=\sin(2t).$$

Da vil det lønne seg å splitte opp $F(s)$ slik at disse to Laplace-transformene dukker opp:
$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{3s-8}{s^2+4}=3\cdot\frac{s}{s^2+2^2}-4\cdot\frac{2}{s^2+2^2}\\&=3\cdot L\{\cos(2t)\}-4\cdot L\{\sin(2\tau)\}\end{aligned}$$
slik at
$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=\underline{\underline{3\cos(2t)-4\sin(2t)}}.$$

Løs Oppgave E3.3.

Så tar vi et litt vanskeligere eksempel der vi har både første- og andregradsfaktorer i nevner:

Eksempel 3.6: Beregn $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ når
$$F(s)=\frac{s^2+3s+12}{(s+1)(s^2+4)}.$$

Løsning: Inspirert av Eksempel 3.4 prøver vi en delbrøkoppspalting som inneholder både $\frac{s}{s^2+2^2}$-ledd og $\frac{2}{s^2+2^2}$-ledd:

$$F(s)=\frac{s^2+3s+12}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{A}{s+1}+B\cdot\frac{s}{s^2+2^2}+C\cdot\frac{2}{s^2+2^2}$$

$$=\frac{A(s^2+4)+Bs(s+1)+2C(s+1)}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{As^2+4A+Bs^2+Bs+2Cs+2C}{(s+1)(s^2+4)}$$

$$=\frac{(A+B)s^2+(B+2C)s+(4A+2C)}{(s+1)(s^2+4)}$$

Sammenlikning av koeffisienter i første og siste brøk gir

$A+B=1$ (1)

$B+2C=3$ (2)

$4A+2C=12$ (3)

Dette likningssystemet kan løses med for eksempel Gauss-eliminasjon. Det er imidlertid enklere å løse det dersom vi ser at (1) – (2) +(3) gir

$5A=10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A=2}$.

(1) gir da $B=1-A=1-2=\underline{-1}$

(3) gir da $C=6-2A=6-2\cdot 2=\underline{2}$.

Altså er

$$F(s)=\frac{s^2+3s+12}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{2}{s+1}-1\cdot\frac{s}{s^2+2^2}+2\cdot\frac{2}{s^2+2^2}$$

(kontroller med kalkulator) slik at

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}+2\cdot L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$$

$$=\underline{\underline{2e^{-t}-\cos(2t)+2\sin(2t)}}$$

Løs Oppgave 3.4.

Du har kanskje lagt merke til at hittil har andregrads-faktorene ikke inneholdt noe førstegrads-ledd. Grunnen er at oppspaltingen og invers-transformeringen blir mye vanskeligere med førstegradsledd, slik eksemplet nedenfor viser.

Eksempel 3.7: Beregn $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ når

$$F(s)=\frac{2s+1}{s^2+4s+13}.$$

Løsning: Nevneren lar seg ikke faktorisere i reelle førstegradsfaktorer. For å komme videre, må vi bruke L8 og L9 i tabellen, der nevneren er skrevet på formen

$(s-a)^2+\omega^2$.

Vi omformer derfor nevneren slik:

$$s^2+4s+13=s^2+4s+\left(\tfrac{1}{2}\cdot 4\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\cdot 4\right)^2+13=\left(s^2+4s+4\right)+9=\left(s+2\right)^2+3^2.$$

For å kunne bruke L8 og L9 i tabellen prøver vi denne oppspaltingen:

$$F(s)=\frac{2s+1}{s^2+4s+13}=A\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}+B\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}=\frac{As+2A+3B}{(s+2)^2+3^2}$$

Sammenlikning av koeffisienter i første og siste brøk gir

$$\underline{A=2}$$

$$2A+3B=1 \quad\Leftrightarrow\quad 3B=1-2A=1-2\cdot 2=-3 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{B=-1}$$

Altså er

$$F(s)=\frac{2s+1}{s^2+4s+13}=2\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}-1\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

som invers-transformeres til

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+4s+13}\right\}=\underline{\underline{2e^{-2t}\cos(3t)-e^{-2t}\sin(3t)}}.$$

Vi avslutter med et "voksent" eksempel:

Eksempel 3.8: Beregn $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$ når

$$F(s)=\frac{-s^3+6s^2-s+10}{s^2\left(s^2+2s+5\right)}.$$

Løsning: Vi ser at

$$s^2+2s+5=s^2+2s+1+4=(s+1)^2+2^2.$$

Vi prøver derfor delbrøkoppspaltingen nedenfor:

$$F(s)=\frac{-s^3+6s^2-s+10}{s^2\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+C\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+D\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$=\frac{A\left(s^2+2s+5\right)+Bs\left(s^2+2s+5\right)+C(s+1)s^2+2D\cdot s^2}{s^2\left(s^2+2s+5\right)}$$

$$=\frac{(B+C)s^3+(A+2B+C+2D)s^2+(2A+5B)s+5A}{s^2\left(s^2+2s+5\right)}$$

Sammenlikning av koeffisienter i første og siste brøk gir

$B+C=-1$ (1)

$A+2B+C+2D=6$ (2)

$2A+5B=-1$ (3)

$5A=10$ (4)

Vi får etter tur:

(4) gir $A = \underline{2}$.

(3) gir $5B = -1 - 2A = -1 - 2 \cdot 2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad B = \underline{-1}$.

(1) gir $C = -1 - B = -1 - (-1) = \underline{0}$.

(2) gir $2D = 6 - A - 2B - 2C = 6 - 2 - 2(-1) - 2 \cdot 0 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad D = \underline{3}$.

Altså er

$$F(s) = \frac{-s^3 + 6s^2 - s + 10}{s^2(s^2 + 2s + 5)} = 2 \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + 3 \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

slik at bruk av tabell gir

$$f(t) = \underline{\underline{2t - 1 + 3e^{-t} \cdot \sin(2t)}}.$$

Løs Oppgave 3.5.

3.5. Laplace-transformer med *s* som nevnerfaktor.

Til slutt vil jeg nevne en teknikk som kan komme til nytte når nevneren inneholder *s* som faktor. Vi tar utgangspunkt i Setning 3 fra forrige notat, som ser slik ut:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s).$$

Vi invers-transformerer hele setningen. Da blir den seende slik ut:

Anta at $F(s)$ har invers Laplace-transform $f(t)$. Da er

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

Vi bruker denne setningen til å løse problemet i Eksempel 3.1 på nytt.

***Eksempel 3.9**:* Beregn $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ når

$$F(s) = \frac{2}{s(s+1)}.$$

Løsning: Fra tabellen ser vi at

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} = 2e^{-t}.$$

Da er

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s+1}\right\} = \int_0^t 2e^{-\tau}\,d\tau = -2\left[e^{-\tau}\right]_0^t = -2\left(e^{-t}-1\right) = \underline{\underline{2-2e^{-t}}}.$$

Vi kan bruke setningen flere ganger etter hverandre, slik neste eksempel viser.

Eksempel 3.10: Beregn $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ når

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}.$$

Løsning: Vi vet at

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}.$$

Da blir

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+2}\right\} = \int_0^t e^{-2\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2}\left[e^{-2\tau}\right]_0^t = -\frac{1}{2}\left(e^{-2t}-1\right) = \underline{\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)}.$$

En gang til:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s+2)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\left(1-e^{-2\tau}\right)d\tau = \frac{1}{2}\left[\tau+\frac{1}{2}e^{-2\tau}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}e^{-2t}-0-\frac{1}{2}\cdot 1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2t}}}$$

Får du samme resultat med delbrøkoppspalting?

Løs Oppgave 3.6.

Nå bør du teste dine kunnskaper med en liten samling blandede oppgaver.

Nå som du kan Laplace-transformere og invers-transformere, har du det verktøyet som skal til for å løse mange typer differensiallikninger som du ofte kommer bort i. Du er også klar til å studere transferfunksjoner og deres anvendelser i modellering og regulering av fysiske systemer.

Men for å få full nytte av denne teknikken, må du innom *Heavisides enhetssprang-funksjon* som gjør Laplace-transformen til et svært nyttig redskap i praktiske situasjoner der vi slår signaler av og på.